

Mini question de cours

Loi, espérance et variance d'une variable suivant une loi uniforme sur $[1, n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Même question avec une variable suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 1

Soit $F : x \mapsto \left(1 - \exp\left(-\frac{2x}{3}\right)\right) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.

1. Montrer que F est une fonction de répartition d'une variable à densité.
2. Déterminer une densité de probabilité de X , une variable aléatoire dont F est la fonction de répartition.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X .
4. Déterminer $P(|X - 2| \leq 4)$.

Exercice 2

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant : il mise initialement 1 euro sur la couleur noire puis :

- S'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise
- S'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ euros ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Mini question de cours

Densité, espérance et variance d'une variable suivant une loi exponentielle.

Exercice 1

Un ingénieur lumière s'occupe de l'éclairage pour un concert. Il possède 4 projecteurs notés P_1, P_2, P_3 et P_4 . Il les allume de la manière suivante.

- Le concert débute avec le projecteur 1 allumé.
- Si le projecteur P_1 est allumé alors un et un des projecteurs P_1, P_2, P_3 ou P_4 s'allume à l'instant suivant et le choix est fait de manière équiprobable.
- Si le projecteur P_k est allumé pour $k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ alors le projecteur P_{k-1} s'allume à l'instant suivant.
- Un seul projecteur est allumé en même temps.

On note X le premier instant où P_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité que P_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter.
5. Écrire un script permettant de modéliser la situation et qui renvoie la valeur prise par X .

Exercice 2

Une usine a une chaîne de montage avec n machines qui travaillent en parallèle. On commence à fabriquer des objets à l'instant 0. Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le temps de fabrication d'un objet sur la i -ème machine et on suppose que X_i suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Lorsque l'objet est fabriqué, la machine s'arrête. Soient t un élément de $[0; 1]$ et N_t le nombre d'objet fabriqués à l'instant t .

1. Reconnaître la loi de N_t .
2. Pour tout entier naturel non nul k , on note T_k le temps nécessaire à la fabrication de k objets.
 - (a) Relier $(T_k \leq t)$ et $(N_t \geq k)$.
 - (b) En déduire que T_k est une variable à densité.

Mini question de cours

Loi de Poisson : loi, espérance, variance ?

Exercice 1

On fait n , n entier naturel non nul, tirages avec remise d'une urne comptant 3 boules numérotées de 1 à 3, on note X le plus grand des nombres obtenus. On note, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_k le numéro de la $k^{\text{ième}}$ boule.

1. Donner la loi de X_1 , son espérance et sa variance.
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. En déduire la loi de X .
4. Expliciter son espérance.
5. Recommencez les questions avec le minimum Y .

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire de densité f avec f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{2}{(1+x)^3} \right) 1_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Prouver que Z est bien définie et déterminer sa fonction de répartition F .
2. Soit x un réel positif, calculer $\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3} dt$ (penser à un changement de variable).
3. Z admet-elle une espérance ? La calculer si oui. (Même question avec la variance)
4. Dans une usine, on suppose que la variable aléatoire égale au temps de fabrication, exprimé en minutes, d'une pièce sur une chaîne de fabrication suit la même loi que Z .
 - (a) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit supérieur à deux minutes.
 - (b) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit inférieur à trois minutes.
 - (c) La fabrication d'une pièce est commencée depuis deux minutes exactement lorsque se présente le responsable de la production. Quelle est alors la probabilité que la pièce soit terminée moins d'une minute après son arrivée ?