

MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 19 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Déterminer la loi de $\min(X, Y)$ avec $Y \sim \mathcal{G}(p)$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et X et Y indépendantes.

Exercice 1

Banque CCINP : Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1.(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .

Déterminer la loi de X .

Exercice 2

Ces questions sont indépendantes. Soient $p \in]0, 1[$, $\lambda \in]0, +\infty[$, $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $W \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

2. Calculer $E\left(\frac{1}{W+1}\right)$.

3. Calculer $E(\max(X, Y))$ avec $Y \sim \mathcal{G}(q)$ avec $q \in]0, 1[$ et X et Y indépendantes.

4. Déterminer la probabilité que la valeur de W soit pair.

MP Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 19 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Loi de $X_1 + X_2$ avec X_1 et X_2 sont indépendantes et suivant des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Proposer deux méthodes, en rédiger une.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X_n la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X_n .
- 2.(a) Déterminer la probabilité $P(X_n = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X_n .
- 3.(a) Calculer $E(X_n)$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(X_n))$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

C'est l'anniversaire de Monsieur Bacquelin, votre colleur préféré, aujourd'hui (on est donc le 20 septembre) et ses amis viennent lui présenter leurs vœux. Le nombre N de personnes ayant effectué le déplacement suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ réel strictement positif). Pour les remercier, ses amis étant trop nombreux, Monsieur Bacquelin offre à chacun d'eux un cadeau de façon aléatoire. Chacun recevra un cadeau avec la probabilité p avec $p \in]0, 1[$ et ceci de façon indépendante.

1. Soit X le nombre de visiteurs ayant reçu un cadeau. Déterminer la loi de X .
2. Soit Y le nombre de visiteurs qui n'ont pas de cadeau. Déterminer la loi de Y .
3. Montrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, les événements $(X = n)$ et $(Y = m)$ sont indépendants.

MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 19 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Calcul et existence de $V(X)$ avec $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$

c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.

En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.

(b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $E(Y)$.

Exercice 2

On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon. Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant : il mise initialement 1 euro sur la couleur noire puis :

- S'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise
- S'il perd, il double sa mise et rejoue.

1. On suppose la fortune du joueur infinie. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2. On suppose toujours la fortune du joueur infinie. Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3. Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ euros ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?