

EXERCICE 102 probabilités

Énoncé exercice 102

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p .

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$
c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.
(b) Reconnaître la loi de Y . En déduire $E(Y)$.

Corrigé exercice 102

1. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.
 $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_i = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$.
Alors on a $P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^n P(X_i = k) = \sum_{k=1}^n pq^{k-1} = p \frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n$.
Donc $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n$.
2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 $P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \dots \cap (X_N > n))$
Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^N P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \dots, X_N$ sont indépendantes.
Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^N q^n = q^{nN}$.
Or $P(Y \leq n) = 1 - P(Y > n)$
donc $P(Y \leq n) = 1 - q^{nN}$.
Calcul de $P(Y = n)$:
Premier cas : si $n \geq 2$.
 $P(Y = n) = P(Y \leq n) - P(Y \leq n-1)$.
Donc $P(Y = n) = q^{(n-1)N} (1 - q^N)$.
Deuxième cas : si $n = 1$.
 $P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = q^{(n-1)N} (1 - q^N)$.
- (b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = q^{(n-1)N} (1 - q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = (1 - (1 - q^N))^{n-1} (1 - q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \frac{1}{1 - q^N}$.

EXERCICE 103 probabilités

Énoncé exercice 103

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[^2$.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .

Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

- (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0, 1]$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .

Déterminer la loi de X .

Corrigé exercice 103

1. (a) $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $(X_1 + X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(X_1 + X_2 = n) = \bigcup_{k=0}^n ((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \text{ (union d'événements deux à deux disjoints).}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n P((X_1 = k) \cap (X_2 = n - k)) \\ &= \sum_{k=0}^n P(X_1 = k)P(X_2 = n - k) \text{ car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Remarque : cette question peut aussi être traitée en utilisant les fonctions génératrices.

- (b) $X_1 + X_2 \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ donc, d'après le cours, $E(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $V(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \sum_{m=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = m)) = \sum_{m=0}^{+\infty} P_{(Y=m)}(X = k)P(Y = m)$.

Or, par hypothèse,

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_{(Y=m)}(X = k) = \begin{cases} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} & \text{si } k \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 P(X = k) &= \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{m-k}}{(m-k)!} \\
 &= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k e^{\lambda(1-p)} \\
 &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

Ainsi $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

EXERCICE 104 probabilités

Énoncé exercice 104

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les n boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.

On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X .
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
3. (a) Calculer $E(X)$.
(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

Corrigé exercice 104

1. $X(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$.
2. (a) Pour que l'événement $(X = 2)$ se réalise, on a $\binom{3}{2}$ possibilités pour choisir les 2 compartiments restant vides. Les deux compartiments restant vides étant choisis, chacune des n boules viendra se placer dans le troisième compartiment avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
De plus les placements des différentes boules dans les trois compartiments sont indépendants.
Donc $P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
- (b) Déterminons $P(X = 1)$.
Pour que l'événement $(X = 1)$ se réalise, on a $\binom{3}{1}$ possibilités pour choisir le compartiment restant vide. Le compartiment restant vide étant choisi, on note A l'événement : «les n boules doivent se placer dans les deux compartiments restants (que nous appellerons compartiment a et compartiment b) sans laisser l'un d'eux vide».

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On note A_k l'événement : « k boules se placent dans le compartiment a et les $(n-k)$ boules restantes dans le compartiment b ».

On a alors $A = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$.

On a $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(A_k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Donc $P(X = 1) = \binom{3}{1} P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k)$ car $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ sont deux à deux incompatibles.

Donc

$$P(X = 1) = 3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} - 2\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2).$$

$$\text{Donc } P(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2).$$

Enfin, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc $P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2)$.

$$\text{Donc } P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 1).$$

Autre méthode :

Une épreuve peut être assimilée à une application de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (ensemble des numéros des boules) dans $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ (ensemble des numéros des cases).

Notons Ω l'ensemble de ces applications.

On a donc : $\text{card } \Omega = 3^n$.

Les boules vont se "ranger aléatoirement dans les trois compartiments", donc il y a équiprobabilité sur Ω .

(a) L'événement $(X = 2)$ correspond aux applications dont les images se concentrent sur le même élément de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, c'est-à-dire aux applications constantes.

$$\text{Donc } P(X = 2) = \frac{3}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

(b) Comptons à présent le nombre d'applications correspondant à l'événement $(X = 1)$, c'est-à-dire le nombre d'applications dont l'ensemble des images est constitué de deux éléments exactement.

On a 3 possibilités pour choisir l'élément de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ qui n'a pas d'antécédent et ensuite, chaque fois, il faut compter le nombre d'applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ vers les deux éléments restants de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$, en excluant bien sûr les deux applications constantes.

On obtient donc $2^n - 2$ applications.

$$\text{D'où } P(X = 1) = \frac{3 \times (2^n - 2)}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}} (2^n - 2).$$

Enfin, comme dans la méthode précédente, $P(X = 0) = 1 - P(X = 2) - P(X = 1)$ donc

$$P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2).$$

$$3. (a) E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^n - 2) + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Donc } E(X) = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

$$(b) \text{ D'après 3.(a), } \lim_{n \rightarrow +\infty} E(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Quand le nombre de boules tend vers $+\infty$, en moyenne aucun des trois compartiments ne restera vide.

a) Notons A_n l'évènement « le jeu dure au moins n parties »

A_{n+1} est la conjonction des évènements indépendants A_n et « le rouge sort au $n+1$ -ième

Par continuité décroissante, on obtient

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.

Lorsque la partie s'arrête à la n -ième tentative, le joueur a perdu

$1 + 2 + \dots + 2^{n-1}$ brouzoufs et vient de gagner 2^n brouzoufs. Au total, il gagne 1 brouzouf. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 brouzoufs, son espérance de gain vaut 1 brouzouf.

b) Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la n -ième tentative, le gain du joueur vaut

$$3^n - (1 + 3 + \dots + 3^{n-1}) = \frac{3^n + 1}{2}$$

L'espérance de gain est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 1}{2} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 1}{2^{n+1}} = +\infty$$

c) Puisque le joueur ne peut disputer que n parties, son espérance de gain devient

$$\sum_{k=1}^n 1 \times P(A_k) - (2^n - 1)P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \frac{1}{2^n} - (2^n - 1) \times \frac{1}{2^n} = 0$$

Par la formule de transfert

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k}$$

Or pour $x \in]-1, 1[$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^k = -\ln(1-x)$$

donc

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{p-1} \ln p$$

Par la formule de Transfert

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda} (e^\lambda - 1)$$

donc

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

On a

$$(Z > n) = (X > n) \cup (Y > n)$$

donc

$$P(Z > n) = P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n, Y > n)$$

Par indépendance

$$P(Z > n) = P(X > n) + P(Y > n) - P(X > n) P(Y > n)$$

Puisque les lois de X et Y sont géométriques

$$P(Z > n) = (1-p)^n + (1-q)^n - (1-p)^n (1-q)^n$$

Or

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n)$$

donc

$$E(Z) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-pq}$$

L'évènement X est pair est la réunion dénombrable des évènements $(X = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Sa probabilité vaut

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda} \text{ch}(\lambda) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2}$$