

Mini question de cours

Loi, espérance et variance d'une variable suivant une loi uniforme sur $[1, n]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Même question avec une variable suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 1

Une urne contient $n - 2$ boules noires et 2 boules blanches avec n un entier supérieur à 2. On tire les boules une par une et sans remise dans l'urne, et on note X le rang d'apparition de la première blanche et Y celui de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X .
2. Prouver que $P(Y = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$ pour tout k de $Y(\Omega)$.
3. Montrer que $E(X) = \frac{n+1}{3}$.
4. Déterminer la loi et l'espérance de A_1 le rang d'apparition de la boule blanche 1 (qui n'est pas forcément la première blanche qui sort).
5. En déduire que $E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}$.

Exercice 2

1. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ et son espérance avec X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .
2. Soient a un réel et f la fonction suivante : $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{a}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
 - (a) Déterminer a pour que f soit une densité. On appellera alors X une variable dont une densité est f .
 - (b) Déterminer la loi de Y avec $Y = \arctan(X)$.

Mini question de cours

Loi, espérance et variance d'une variable suivant une loi exponentielle puis géométrique.

Exercice 1

Un ingénieur lumière s'occupe de l'éclairage pour un concert. Il possède 4 projecteurs notés P_1, P_2, P_3 et P_4 . Il les allume de la manière suivante.

- Le concert débute avec le projecteur 1 allumé.
- Si le projecteur P_1 est allumé alors un et un des projecteurs P_1, P_2, P_3 ou P_4 s'allume à l'instant suivant et le choix est fait de manière équiprobable.
- Si le projecteur P_k est allumé pour $k \in \llbracket 2, 4 \rrbracket$ alors le projecteur P_{k-1} s'allume à l'instant suivant.
- Un seul projecteur est allumé en même temps.

On note X le premier instant où P_2 s'allume.

1. Calculer la probabilité que P_1 reste allumé jusqu'à l'instant $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.
4. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et interpréter.
5. Écrire un script permettant de modéliser la situation et qui renvoie la valeur prise par X .

Exercice 2

Une usine a une chaîne de montage avec n machines qui travaillent en parallèle. On commence à fabriquer des objets à l'instant 0. Pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i le temps de fabrication d'un objet sur la i -ème machine et on suppose que X_i suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Lorsque l'objet est fabriqué, la machine s'arrête. Soient t un élément de $[0; 1]$ et N_t le nombre d'objet fabriqués à l'instant t .

1. Reconnaître la loi de N_t .
2. Pour tout entier naturel non nul k , on note T_k le temps nécessaire à la fabrication de k objets.
 - (a) Relier $(T_k \leq t)$ et $(N_t \geq k)$.
 - (b) En déduire que T_k est une variable à densité.

BCPST2 Sujet 3

Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 21 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Loi de Poisson : loi, espérance, variance ? Même question avec une loi normale.

Exercice 1

Soit X une variable discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance.

1. Expliciter $P(X \geq 1)$ et $P(X \geq 2)$ à l'aide de $P(X = 1), P(X = 2), \dots, P(X = n)$ et enfin de $P(X \geq n + 1)$.

2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n P(X = k)k + nP(X \geq n + 1) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.

3. Soit n un entier naturel. Montrer que : $nP(X \geq n + 1) \leq E(X) - \sum_{k=0}^n kP(X = k)$.

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nP(X \geq n + 1)) = 0$.

5. Montrer que $\sum P(X \geq k)$ converge et que : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.

Exercice 2

Soit Z une variable aléatoire de densité f avec $f : x \mapsto \left(\frac{2}{(1+x)^3}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.

1. Prouver que Z est bien définie et déterminer sa fonction de répartition F .

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, calculer $\int_0^x \frac{2t}{(1+t)^3} dt$ (penser à un changement de variable).

3. Z admet-elle une espérance ? La calculer si oui. (Même question avec la variance)

4. Dans une usine, la variable aléatoire égale au temps de fabrication, exprimé en minutes, d'un pièce sur une chaîne de fabrication suit la même loi que Z .

(a) Calculer la probabilité que le temps de fabrication d'une pièce soit supérieur à deux minutes (resp. inférieur à trois minutes.)

(b) La fabrication d'une pièce est commencée depuis deux minutes exactement lorsque se présente le responsable de la production. Quelle est alors la probabilité que la pièce soit terminée moins d'une minute après son arrivée ?