

EXERCICE 31 analyse**Énoncé exercice 31**

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
- Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle : $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

Corrigé exercice 31

- En linéarisant $\cos^4 x$, on obtient $\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3)$.

Donc, $x \mapsto \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x$ est une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

- Notons (E) l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$.

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$.

Par la méthode de variation des constantes,

on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$ avec λ, μ fonctions

dérivables vérifiant :
$$\begin{cases} \lambda'(x) \cos x + \mu'(x) \sin x = 0 \\ -\lambda'(x) \sin x + \mu'(x) \cos x = \cos^3 x \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \lambda'(x) = -\sin x \cos^3 x \\ \mu'(x) = \cos^4 x \end{cases}.$$

$\lambda(x) = \frac{1}{4} \cos^4 x$ convient.

D'après la question 1., $\mu(x) = \frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x$ convient.

On en déduit que la fonction y_p définie par $y_p(x) = \frac{1}{4} \cos^5 x + \left(\frac{1}{32} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x \right) \sin x$ est une solution particulière de (E).

Finalement, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions y définies par : $y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + y_p(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 32 analyse

Énoncé exercice 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ de \mathbb{R} , avec $r > 0$.
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ sur $]0; 1[$ sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur $] -1, 1[$?

Corrigé exercice 32

1. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S .

Pour tout $x \in] -R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}.$$

$$\text{Donc } x(x-1)S''(x) + 3xS'(x) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1}) x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $] -R, R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$.

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_{n+1} = (n+1) a_n$.

Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n a_1$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum n x^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :

$$x \mapsto a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = a_1 x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{a_1 x}{(1-x)^2} \quad \text{définies sur }] -1, 1[, \text{ avec } a_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.

Prouvons que les solutions de (E) sur $]0; 1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine.

Raisonnons par l'absurde.

Si toutes les solutions de (E) sur $]0; 1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1.,

l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; 1[$ serait égal à la droite vectorielle $\text{Vect}(f)$ où f est la fonction

$$\text{définie par } \forall x \in]0; 1[, \quad f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \mapsto x(x-1)$, $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 1$ sont continues sur $]0; 1[$ et que la fonction $x \mapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0; 1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0; 1[$ est un plan vectoriel.

D'où l'absurdité.

EXERCICE 42 analyse**Énoncé exercice 42**

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Corrigé exercice 42

1. On trouve comme solution de l'équation homogène sur $]0, +\infty[$ la droite vectorielle engendrée par $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$.

En effet, une primitive de $x \mapsto \frac{3}{2x}$ sur $]0, +\infty[$ est $x \mapsto \frac{3}{2} \ln x$.

2. On utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une fonction k telle que $x \mapsto k(x)x^{\frac{3}{2}}$ soit une solution de l'équation complète (E) sur $]0, +\infty[$.

On arrive alors à $2k'(x)x^{\frac{5}{2}} = \sqrt{x}$ et on choisit $k(x) = -\frac{1}{2x}$.

Les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont donc les fonctions $x \mapsto kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

3. On suppose qu'il existe une solution f de (E) sur $[0, +\infty[$.

Alors f est aussi solution de E sur $]0, +\infty[$.

Donc, il existe une constante k telle que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

De plus, comme f est solution de E sur $]0, +\infty[$ alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Donc en particulier, f est continue en 0.

Donc $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(kx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) = 0$.

f doit également être dérivable en 0.

Or, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = k\sqrt{x} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est l'ensemble vide.

$$a) y(x) = \frac{C+x+e^x}{1+e^x}$$

$$b) y(x) = \frac{C+x}{e^x-1}$$

$$c) y(x) = \frac{C+\ln x}{(1+\ln^2 x)}$$

$$a) y(x) = (2 + \cos x)(C - \ln(2 + \cos x))$$

$$b) y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$c) y(x) = C \sin x + \cos x$$

$$d) y(x) = Ce^{-1/\sin^2 x}$$

La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$

En introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = e^{i\omega_0 x}$$

et en considérant la partie réelle d'une solution particulière de celle-ci, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$$

Les conditions initiales déterminent λ et μ

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x)$$

Posons $\Delta = a^2 - 4b$ discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Si $\Delta > 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur \mathbb{R}^+ si, et seulement si, les deux solutions de l'équation $r^2 + ar + b = 0$ sont négatives i.e. $a \geq 0$ (opposé de la somme des racines) et $b \geq 0$ (produit des racines).

Si $\Delta = 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur \mathbb{R}^+ si, et seulement si, $a > 0$.

Si $\Delta < 0$ alors les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ seront bornées sur \mathbb{R}^+ si, et seulement si, elles sont de parties réelles négatives i.e. $a \geq 0$.

Au final les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}^+ si, et seulement si, $a, b \geq 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Soit f une fonction solution (s'il en existe).

La dérivée de f apparaît dérivable et donc f est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda \sin 2 - \mu \cos 2 \\ \mu = \lambda \cos 2 + \mu \sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1 + \sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha$, on a $\mu = (1 + \sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha (\sin x + \cos(2-x)) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Supposons f solution. En évaluant la relation en $s = t = 0$ on obtient

$$f(0) = f(0)^2 \text{ donc } f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$$

En dérivant la relation en t on obtient : $f'(s+t) = f(s)f'(t)$ puis en évaluant en $t = 0$: $f'(s) = f'(0)f(s)$.

Ainsi f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

On en déduit $f(x) = Ce^{\alpha x}$ avec $C, \alpha \in \mathbb{C}$.

Parmi ces solutions, celles vérifiant $f(0) = 0$ ou 1 sont $f(x) = 0$ et $f(x) = e^{\alpha x}$.

Inversement, ces fonctions sont solutions.

Soit f une solution.

Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$.

De plus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)}{h} = e^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{e^h - 1}{h} f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^x f'(0) + f(x)$$

Par suite f est dérivable en x et $f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$.

La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme

$y' = y + Ce^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.

Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cxe^x$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.