

# MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 20 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Question de cours

Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre sympathique : expliquer comment résoudre de telles équations.

### Exercice 1

#### Banque CCINP :

1. Déterminer une primitive de  $x \mapsto \cos^4(x)$ .
2. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle :  $y'' + y = \cos^3(x)$  en utilisant la méthode de variation des constantes.

### Exercice 2

#### Ces deux questions sont indépendantes.

- 1.(a) Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue  $y$  fonction dérivable :

$$(2 + \cos(x))y' + \sin(x)y = (2 + \cos(x)) \sin(x) \quad (E_1)$$

$$(e^x - 1)y' + e^x y = 1 \quad (E_2)$$

- (b) Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction dérivable sur  $]0, \pi[$  :

$$\sin(x)y' - y \cos(x) + 1 = 0 \quad (E_3)$$

2. Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$  dérivables telles que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(s + t) = f(s) \times f(t).$$

## Question de cours

Wronskien pour les équations d'ordre 2 : définition et utilisation.

## Exercice 1

**Banque CCINP :** Soit l'équation différentielle :  $x(x - 1)y'' + 3xy' + y = 0$ .

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle  $]-r, r[$  de  $\mathbb{R}$ , avec  $r > 0$ .  
Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de  $x(x - 1)y'' + 3xy' + y = 0$  sur  $]0; 1[$  sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur  $]-1, 1[$  ?

## Exercice 2

**Ces deux questions sont indépendantes.**

- 1.(a) Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction dérivable :

$$(1 + \cos^2(x))y' - \sin(2x)y = \cos(x) \quad (E_1)$$

$$(e^x + 1)y' + e^x y = 1 + e^x \quad (E_2)$$

- (b) Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction dérivable sur  $]0, \pi[$  :

$$(\sin(x))^3 y' = 2 \cos(x)y \quad (E_3)$$

- (c) Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction dérivable sur  $]0, +\infty[$  :

$$x(1 + (\ln(x))^2)y' = 1 - 2 \ln(x)y \quad (E_4)$$

2. Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

## MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 20 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Question de cours

Wronskien pour les équations d'ordre 1 : définition et utilisation.

### Exercice 1

**Banque CCINP :** On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H) \quad \text{et} \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E).$$

1. Résoudre l'équation  $(H)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
2. Résoudre l'équation  $(E)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
3. L'équation  $(E)$  admet-elle des solutions sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  ?

### Exercice 2

**Ces deux questions sont indépendantes.**

- 1.(a) Soient  $\omega$  et  $\omega_0$  deux réels strictement positifs et distincts. Trouver les solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction dérivable :

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .

- (b) Déterminer les couples  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que toute solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction deux fois dérivable :

$$y'' + ay' + by = 0$$

soit bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. Trouver toutes les applications  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x).$$