MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 19 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Compléter sans justifier :

- Si $w_n = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(u_n)$ et $z_n = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ alors ...
- Si $w_n = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(u_n)$ et $u_n = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$ alors ...
- Si $w_n = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(u_n)$ et $u_n = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ alors ...
- Si $w_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$ et $u_n = \underset{+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$ alors ...

Démonstration: Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
3. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0 à C_f, la courbe représentative de f.
4. Préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de C_f.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$.

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner les équations des asymptotes de f ainsi que la position de ces asymptotes par rapport à la courbe représentative C_f de f.
4. Quelle est la tangente en 0 à C_f ?

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, cos et arctan.
Démonstration: Montrer que le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Exercice 1

1. Trouver un équivalent en 0 de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\left(\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}\right)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$.

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.
3. Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Énoncer le théorème de Taylor-Young.

Démonstration: Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 1

1. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes et en déduire leur limites :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n^3 - \ln(n) + 1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n! + e^n}{3^n + 2^n}.$$
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.
3. Soit f une fonction telle que $f(x) = x + x^2 + \underset{0}{\mathrm{o}}(x^3)$. Donner l'équation de la tangente à C_f, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0. Étudier la position de C_f par rapport à cette tangente.

Exercice 2

On pose $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x} - e^x)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et établir : $f(x) = x + x^2 + \underset{0}{\mathrm{o}}(x^3)$. Qu'en déduire ?
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudier la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
3. (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\ln(2), +\infty[$ sur un intervalle ouvert J que l'on précisera (on remarquera que $0 \in J$). On admet dans ce cas que la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow]-\ln(2), +\infty[$ est encore de classe C^∞. Montrer qu'il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. tel que : $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{0}{\mathrm{o}}(x^3)$.
   (b) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto f^{-1}(f(x))$.
   (c) Donner une autre expression du développement limité de $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c et d.
   (d) Conclure que $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underset{0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

MP2I **Sujet 1** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 19 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Exposer la méthode pour obtenir les DL en a et en l'infini.
Démonstration : Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
3. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0 à C_f, la courbe représentative de f.
4. Préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de C_f.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$.

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner les équations des asymptotes de f ainsi que la position de ces asymptotes par rapport à la courbe représentative C_f de f.
4. Quelle est la tangente en 0 à C_f ?

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, ch et tan.
Démonstration : Montrer que le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Exercice 1

1. Trouver un équivalent en 0 de $x \mapsto \ln(\mathrm{ch}(x))$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2} \right)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$.

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.
3. Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:
Semaine de colle: 19 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner le développement limité à l'ordre 3 de arctan, sin et $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Démonstration : Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 1

1. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes et en déduire leur limites :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n^3-\ln(n)+1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n!+e^n}{3^n+2^n}.$$
2. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right)$.
3. Soit f une fonction telle que $f(x) = x+x^2+\underset{0}{o}(x^3)$. Donner l'équation de la tangente à C_f, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0. Étudier la position de C_f par rapport à cette tangente.

Exercice 2

On pose $f : x \mapsto \ln(1+e^{2x}-e^x)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ et établir : $f(x) = x+x^2+\underset{0}{o}(x^3)$. Qu'en déduire ?
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudier la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
3. (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\ln(2), +\infty[$ sur un intervalle ouvert J que l'on précisera (on remarquera que $0 \in J$). On admet dans ce cas que la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow]-\ln(2), +\infty[$ est encore de classe C^{∞}. Montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. tel que : $f^{-1}(x) = a+bx+cx^2+dx^3+\underset{0}{o}(x^3)$.
   (b) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto f^{-1}(f(x))$.
   (c) Donner une autre expression du développement limité de $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c et d.
   (d) Conclure que $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$.

MP2I **Sujet 1** Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Exposer la méthode pour obtenir les DL en a et en l'infini.
Démonstration : Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f.
3. Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0 à C_f, la courbe représentative de f.
4. Préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de C_f.

Exercice 2

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$.

1. Donner le tableau de variations de f.
2. Trouver les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner les équations des asymptotes de f ainsi que la position de ces asymptotes par rapport à la courbe représentative C_f de f.
4. Quelle est la tangente en 0 à C_f ?

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner le développement limité à l'ordre 3 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$, ch et tan.
Démonstration : Montrer que le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Exercice 1

1. Trouver un équivalent en 0 de $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(\left(\operatorname{ch}\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2} \right)$.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{3/x^2}$.

Exercice 2

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.
3. Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

MP2I **Sujet 3** Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19 cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner le développement limité à l'ordre 3 de arctan, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Démonstration : Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Exercice 1

1. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{2n^3 - \ln(n) + 1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n! + e^n}{3^n + 2^n}.$$

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.
3. Soit f une fonction telle que $f(x) = x + x^2 + \underset{0}{o}(x^3)$. Donner l'équation de la tangente à C_f, la courbe représentative de f, au point d'abscisse 0. Étudier la position de C_f par rapport à cette tangente.

Exercice 2

On pose $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x} - e^x)$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et établir : $f(x) = x + x^2 + \underset{0}{o}(x^3)$. Qu'en déduire ?
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et étudier la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
3. (a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\ln(2), +\infty[$ sur un intervalle ouvert J que l'on précisera (on remarquera que $0 \in J$). On admet dans ce cas que la bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow]-\ln(2), +\infty[$ est encore de classe C^∞. Montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. tel que : $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \underset{0}{o}(x^3)$.
   (b) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto f^{-1}(f(x))$.
   (c) Donner une autre expression du développement limité de $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en fonction de a, b, c et d.
   (d) Conclure que $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$.