

EXERCICE 52 analyse**Énoncé exercice 52**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien \mathbb{R}^2 .
(b) Déterminer α pour que f soit continue sur \mathbb{R}^2 .
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
(a) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et les calculer.
(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
(c) f est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Corrigé exercice 52

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $x^2 + y^2 - xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) = \frac{1}{2}(x - y)^2 \geq 0$.
Donc $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
D'après 1., $x^2 + y^2 - xy = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$.
Ainsi, f est définie sur \mathbb{R}^2 .
(b) D'après les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
D'après 1., pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $0 \leq f(x, y) \leq \frac{2y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2}$.
Ainsi, $0 \leq f(x, y) \leq 2(x^2 + y^2) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$.
Or : f est continue en $(0, 0) \iff f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, 0) = \alpha$.
Donc : f est continue en $(0, 0) \iff \alpha = 0$.
Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^2 \iff \alpha = 0$.
3. (a) D'après les théorèmes généraux, f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^4(2x - y)}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$.
(b) Pour tout $x \neq 0$, $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.
Pour tout $y \neq 0$, $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
(c) Pour montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , montrons que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 .
Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en $(0, 0)$.
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on note $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. On a alors $|x| \leq r$ et $|y| \leq r$.
De plus, $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff r \rightarrow 0$.
D'après 1. et l'inégalité triangulaire,
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 4 \frac{|y^4(2x - y)|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 \frac{r^4(2r + r)}{r^4} = 12r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.
 $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq 4 \frac{|2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 \frac{2r^5 + 3r^5 + 4r^5}{r^4} = 36r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ et par suite sur \mathbb{R}^2 .

Ainsi, f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 57 analyse

Énoncé exercice 57

- Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
 - Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
 - Donner la définition de « f différentiable en $(0, 0)$ ».
- On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 - Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
 - Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Corrigé exercice 57

- f est continue en $(0, 0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < \alpha \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$.
 $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur \mathbb{R}^2 puisque toutes les normes sont équivalentes sur \mathbb{R}^2 (espace de dimension finie).
 - f est différentiable en $(0, 0) \iff \exists L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ / au voisinage de $(0, 0)$,
 $f(x, y) = f(0, 0) + L(x, y) + o(\|(x, y)\|)$.

Remarque : Comme \mathbb{R}^2 est de dimension finie, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ alors $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

- On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^2 .
 On remarque que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \|(x, y)\|$ et $|y| \leq \|(x, y)\|$ (*).
 - $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ et $(x, y) \mapsto xy(x^2 - y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Continuité en $(0, 0)$:

On a, en utilisant (*) et l'inégalité triangulaire, $|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \cdot |y| \leq \|(x, y)\|^2$.

Donc f est continue en $(0, 0)$.

- f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur \mathbb{R}^2 et sont continues sur \mathbb{R}^2 .

f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et elles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

De plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$. (**)

Existence des dérivées partielles en $(0, 0)$:

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

De même, $\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$, donc $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$; donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Continuité des dérivées partielles en $(0, 0)$:

D'après (*) et (**), $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{x^4 |y| + 4x^2 |y|^3 + |y|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{6 \|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6 \|(x, y)\| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{6 \|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6 \|(x, y)\|.$$

Donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0, 0)$.

Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur \mathbb{R}^2 , donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

EXERCICE 58 analyse

Énoncé exercice 58

1. Soit E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit $a \in E$ et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Donner la définition de « f différentiable en a ».

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On pose : $\forall x \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

On pose : $\forall (x, y) \in E \times E, \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.

On admet que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E \times E$.

Soit $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E .

(a) Prouver que : $\exists C \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in E \times E, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

(b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Corrigé exercice 58

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $a \in E$.

f est différentiable en $a \iff \exists L \in \mathcal{L}_C(E, F)$ / au voisinage de 0, $f(a+h) = f(a) + L(h) + o(\|h\|)$.

Auquel cas, f est différentiable en a et $df(a) = L$.

Remarque 1 : $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur E car, comme E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque 2 : Comme E est de dimension finie, si $L \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $L \in \mathcal{L}_C(E, F)$.

2. (a) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } \exists ! (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n / y = \sum_{j=1}^n y_j e_j.$$

$$\text{Par bilinéarité de } B, \text{ on a } B(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(e_i, e_j).$$

$$\text{Donc } |B(x, y)| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i| \cdot |y_j| \cdot |B(e_i, e_j)| \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |B(e_i, e_j)| \right) \|x\|_\infty \cdot \|y\|_\infty.$$

$$\text{Alors } C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |B(e_i, e_j)| \text{ convient.}$$

- (b) Soit $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Par bilinéarité de B on a :

$$\forall (u, v) \in E \times E, B(u_0 + u, v_0 + v) = B(u_0, v_0) + B(u_0, v) + B(u, v_0) + B(u, v). \quad (*)$$

On pose $L((u, v)) = B(u_0, v) + B(u, v_0)$.

Vérifions que L est linéaire sur $E \times E$.

Soit $(x, y) \in E \times E$. Soit $(x', y') \in E \times E$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$L((x, y) + \alpha(x', y')) = L((x + \alpha x', y + \alpha y')) = B((u_0, y + \alpha y')) + B((x + \alpha x', v_0)).$$

$$\text{Donc par bilinéarité de } B, L((x, y) + \alpha(x', y')) = B((u_0, y)) + \alpha B((u_0, y')) + B((x, v_0)) + \alpha B((x', v_0)).$$

C'est-à-dire $L((x, y) + \alpha(x', y')) = L((x, y)) + \alpha L((x', y'))$.

On en déduit que $L \in \mathcal{L}(E \times E, \mathbb{R})$.

Donc, comme $E \times E$ est de dimension finie, $L \in \mathcal{L}_C(E \times E, \mathbb{R})$. (**)

De plus, d'après 2.(a), $\exists C \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in E^2, |B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

Donc $\forall (x, y) \in E^2, |B(x, y)| \leq C \|(x, y)\|^2$.

On en déduit que, au voisinage de $(0, 0)$, $|B(x, y)| = o(\|(x, y)\|)$. (***)

D'après (*),(**) et (***), B est différentiable en (u_0, v_0) et $dB((u_0, v_0)) = L$.

a) Soit $a \in E$. On peut écrire

$$f(a+h) = \frac{1}{2} \left((u(a) | a) + (u(a) | h) + (u(h) | a) + (u(h) | h) \right) + (x_0 | a) + (x_0 | h)$$

Sachant $(u(h) | a) = (u(a) | h)$, on obtient

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + (u(h) | h)$$

avec ℓ la forme linéaire donnée par

$$\ell(h) = (u(a) + x_0 | h)$$

Puisque

$$|(u(h) | h)| \leq \|u(h)\| \|h\| \quad \text{avec} \quad \|u(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0$$

on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$$

Finalement f est différentiable en a et

$$df(a).h = (u(a) + x_0 | h)$$

b) Le gradient de f en a est alors

$$\text{grad } f(a) = u(a) + x_0$$

a) Soit $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{1}{t}(f(t.h) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$D_h f(0,0) = \begin{cases} \beta^2/\alpha & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(1/n, 1/\sqrt{n}) = 1 \rightarrow 1 \neq f(0,0)$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

- a) Quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, on peut écrire $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$.

On a alors

$$f(x, y) = 2r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \ln r \rightarrow 0$$

car $r^2 \ln r \rightarrow 0$

On prolonge f par continuité en $(0, 0)$ en posant $f(0, 0) = 0$.

- b) f est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ par opérations. On observe $f(x, y) = -f(y, x)$ donc en dérivant cette relation en la variable x on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

- c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, on peut écrire $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4r \ln r + 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

a) Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant. La fonction $x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont et par multilinéarité du déterminant, la fonction D_n est dérivable avec

$$D'_n = \det(C'_1, C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C'_2, \dots, C_n) + \dots + \det(C_1, C_2, \dots, C'_n)$$

et donc

$$D'_n = \det(C_1, C_2, \dots, C'_n)$$

En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant, on obtient :

$$D'_n(x) = D_{n-1}(x)$$

b) Sachant $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$ on peut conclure, par récurrence,

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

L'application φ est clairement de classe \mathcal{C}^1 .
Étudions sa bijectivité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases}$$

ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} y + f(b - f(y)) = a \\ x = b - f(y) \end{cases}$$

Considérons l'application

$$\varphi_b : y \mapsto y + f(b - f(y))$$

φ_b est continue dérivable et

$$\varphi'_b(y) = 1 - f'(y)f'(b - f(y))$$

donc $\varphi'_b(y) > 0$ car

$$|f'(y)f'(b - f(y))| \leq k^2 < 1$$

Par conséquent, l'application φ_b est strictement croissante.
De plus, f étant k lipschitzienne

$$|f(t) - f(0)| \leq k|t|$$

donc

$$|f(t)| \leq k|t| + |f(0)|$$

puis

$$|f(b - f(y))| \leq k|b - f(y)| + |f(0)| \leq k^2|y| + \ell$$

par suite

$$\varphi_b(y) \geq (1 - k^2)y - \ell \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$$

et

$$\varphi_b(y) \leq (1 - k^2)y + \ell \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$$

L'application φ_b réalise donc une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et alors

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a) \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .
Rappelons que l'application φ est classe \mathcal{C}^1 . De plus

$$\text{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et donc le jacobine de φ ne s'annule pas en vertu du calcul suivant

$$\det(\text{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq 0$$

et car $|f'(x)f'(y)| \leq k^2 < 1$.

Par le théorème d'inversion globale, on peut alors affirmer que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.