MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Différentiabilité en tout point et calcul de la différentielle en tout point de $f : M \mapsto M^2$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1

Banque CCINP : oit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. f est-elle continue en $(0,0)$?

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$ et :

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^+y^2} \text{ pour tout } (x,y) \text{ dans } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.$$

Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par, pour tout $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on pose :

$$f(x,y)=(x^2-y^2)\ln\left(x^2+y^2\right)$$

1. Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0,0)$?
2. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et établir que, pour tout $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 21 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Différentiabilité d'une application bilinéaire et différentielle en tout point

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie.
   Soit $a \in E$ et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
   Donner la définition de «f différentiable en a».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
   Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
   On pose : $\forall (x, y) \in E \times E,\ \|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$. On admet que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E et que $\|.\|$ est une norme sur $E \times E$.
   Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.

   (a) Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ / \forall\, (x, y) \in E \times E,\ |B(x, y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

   (b) Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

Exercice 2

Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et x_0 un vecteur de E.
On étudie la fonction $f \colon E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \frac{1}{2} \langle x, u(x) \rangle + \langle x, x_0 \rangle$$

1. Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.
2. Calculer le gradient de f en tout point de E.