

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 20

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition des suites équivalentes, équivalents et opérations.
Démonstration: Développement limité et tangente (en particulier position par rapport à la tangente).

Exercice 1

On pose $f : x \mapsto \left(\frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))} \right)$.

1. On admet que : $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$. En déduire l'équation de la tangente à C_f , la courbe représentative de f , au point d'abscisse 0. Étudier la position de C_f par rapport à cette tangente.
2. Établir : $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$.

Exercice 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

1. Étudier $f : x \mapsto x \exp(-x)$ et déterminer le signe de $x \mapsto f(x) - x$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et déterminer sa limite.
3. On suppose désormais $a > 0$. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ ait une limite finie non nulle.
4. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition du grand o, grand o et opérations.

Démonstration: Développement limité et asymptote (en particulier position par rapport à l'asymptote).

Exercice 1

On pose $f : x \mapsto \left(\frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} \right)$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$.

2. On admet que : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$. En déduire l'équation de la tangente à C_f , la courbe représentative de f , au point d'abscisse 0. Étudier la position de C_f par rapport à cette tangente.

3. Établir : $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$.

Exercice 2

Ces trois questions sont indépendantes.

1.(a) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$.

(b) En déduire le développement limité d'ordre 3 en 2 de $x \mapsto \frac{1}{x}$.

2. Soit $g : x \mapsto x^2 \ln(x)$.

(a) Montrer que g se prolonge par continuité en 0 et que cette fonction est dérivable en 0. On note encore g son prolongement.

(b) Montrer que g n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) + (f(-x))}{x^2} \right)$.

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 20

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Citer la formule de Stirling puis la proposition sur équivalent et composition avec \ln .

Démonstration: Obtention d'un équivalent à partir d'un développement limité, obtention d'un signe à partir d'un équivalent.

Exercice 1

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1 + x^3} - 1} \right)$.
2. Trouver un équivalent en 0 de $\sin - \tan$.
3. Trouver un équivalent simple aux suites et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}.$$

Exercice 2

On pose $g : x \mapsto \left(\frac{e^x + 1}{2} \right)^{1/x}$ et $\varphi : x \mapsto 2x \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln \left(\frac{e^x + 1}{2} \right)$.

1. Étudier le signe de φ .
2. Établir : $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{8} - \frac{x^3}{192} + o_0(x^3)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x + 1}{2} \right)$.
3. En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de g .
4. En déduire l'équation de la tangente à C_g , la courbe représentative de g , au point d'abscisse 0. Étudier la position de C_g par rapport à cette tangente.
5. Donner l'équation de l'asymptote à C_g en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote.