BCPST2 **Sujet 1** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 23 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Petit cours sur les équa diffs d'ordre 2 homogène et à coefficients constants

Exercice 1

On pose : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que : } \ x+y+z+t=0 \ \text{ et } \ x-y+z-t=0\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $x = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a un réel non nul. On note f l'application définie sur E par

$$f : P \mapsto (X-a)P'.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice de f dans la base canonique de E. En déduire que f admet $n+1$ valeurs propres distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n$.
3. Soit P_k un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_k.
   (a) Déterminer $\deg(P_k)$.

   (b) On note r_k l'ordre de multiplicité de a en tant que racine de P_k, et Q_k tel que $P_k = (X-a)^{r_k} Q_k$. Déterminer r_k et en déduire le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_k.

BCPST2 **Sujet 2** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 23 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Mini question de cours

Expression dans une base orthonormée du projecteur orthogonal

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+1)(\sqrt{x}+1)}$. On note F la primitive de f s'annulant en 1.

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2\sqrt{t}}dt$ converge puis que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. Soit x un réel strictement positif. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que :
$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -\int_1^x \frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)\left(1+\sqrt{t}\right)}dt.$$
3. Expliciter $F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement positif.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 2

Soient A et B les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A et B.
2. Montrer qu'elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage P que l'on précisera.
3. En déduire les valeurs propres de la matrice $M(a,b) = \begin{pmatrix} b & -b & a \\ -b & b & -a \\ a & -a & 2b-a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels quelconques.

BCPST2 **Sujet 3** Colleur: ton ex prof :(

Semaine de colle: 23 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques

Mini question de cours

Explicitation des suites arithméticogéométriques

Exercice 1

Résoudre le système différentielle suivant d'inconnue y fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$y^{''} + 2y' + 2y = (x-1)e^{-x} \text{ et } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 1$$

sachant qu'il existe a et b deux réels tels que : $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ soit une solution de l' équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$y^{''} + 2y' + 2y = (x-1)e^{-x}.$$

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \arctan^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge.
2. Montrer que pour tout réel positif x, on a $\arctan(x) \leqslant x$ et en déduire que $u_n \geqslant v_n$ pour tout entier naturel non nul n.
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout réel x supérieur à 1, on a : $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geqslant \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $u_n - v_n \leqslant \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$ puis que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
$$0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{4}{n}$$
5. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.