

Mini question de cours

Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1

Résoudre le système différentielle suivant d'inconnue y fonctions deux fois dérivables sur \mathbb{R} :

$$y'' + 2y' + 2y = (x - 1)e^{-x} \text{ et } y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 1$$

sachant qu'il existe a et b deux réels tels que : $x \mapsto (ax + b)e^{-x}$ soit une solution de l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonction deux fois dérivables sur \mathbb{R} :

$$y'' + 2y' + 2y = (x - 1)e^{-x}.$$

Exercice 2

1. On pose $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt$ et $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sin(t) + \cos(t)} dt$.

(a) Démontrer que $S = C$.

(b) En déduire S et C .

(c) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1-t^2}} dt$.

2. Soit a un réel strictement positif.

(a) Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ est convergente.

(b) Étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$.

(c) Montrer que : $\int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx + \int_a^1 \frac{\cos(x) - 1}{x} dx + \int_a^1 \frac{dx}{x}$.

(d) Déterminer un équivalent de $a \mapsto \int_a^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} dx$ en 0.

Mini question de cours

Donner la nature des intégrales de Riemann.

Exercice 1

1. Expliciter une base orthonormée du plan \mathcal{P} d'équation $x + y - 2z = 0$.
2. Déterminer la matrice A canoniquement associée à la projection orthogonale p dans \mathbb{R}^3 sur le plan \mathcal{P} .

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1 et u_2 puis écrire en Python une fonction qui renvoie les N premières valeurs de la suite (u_n) .
- 2.(a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2$.
 (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .
 (c) Établir que, pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
 (d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.
4. On se propose de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
 (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))$ converge et : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
 (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$.
 (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell - u_n \leq \ell(1 - e^{-\frac{1}{2^n}})$ puis $0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$ et conclure.

Mini question de cours

Citer le théorème de comparaison pour les séries.

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Donner une base orthonormale de F^\perp avec $F = \text{Vect}((1, 0, 1))$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n avec n entier naturel.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y fonctions deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$:

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2 \quad (E).$$

1. On suppose que f vérifie (E) . On pose alors $g : t \mapsto f(e^t)$. Montrer que g vérifie (E') une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
2. Résoudre (E') sachant qu'il existe a un réel tel que $x \mapsto ax \exp(2x)$ soit solution de (E') .
3. En déduire les solutions de (E) .