MP **Sujet 1** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Rapport entre matrice hessienne et extremum...

Exercice 1

Banque CCINP : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2.$$

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$.
   Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer le domaine de définition et étudier les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ suivante :

$$f : (x,y) \mapsto y(x^2 + \ln^2(y)).$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   (a) Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.

   (b) f est-elle continue en $(0,0)$?

MP **Sujet 2** Corrigé dès mercredi sur:
Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Question de cours

Optimisation sous contrainte...

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f : (x, y) \mapsto x^2y - xy^2$.
   (a) Chercher les points critiques de f.
   (b) Calculer $f(x, 2x)$ pour x réel et en déduire que f n'admet pas d'extremum.
   (c) Démontrer de nouveau ce résultat grâce aux théorèmes de votre cours.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par, pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose :

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

   (a) Est-il possible de prolonger f par continuité en $(0, 0)$?
   (b) Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et établir que, pour tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

   (c) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Banque CCINP : On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0, 0) = 0$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \; f(x, y)\frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy}.$$

1. Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

MP **Sujet 3** Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 22 https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour....

Exercice 1

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z)(x + y + 2z).$$

   (a) Chercher les points critiques de f.

   (b) f a-t-elle des extremum ?

   (c) Déterminer les extremum dans la boule unité.

2. Soient u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et x_0 un vecteur de E. On étudie la fonction $f \colon E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \ f(x) = \frac{1}{2}\langle x, u(x)\rangle + \langle x, x_0\rangle$$

   (a) Montrer que f est différentiable et exprimer sa différentielle.

   (b) Calculer le gradient de f en tout point de E.

Exercice 2

Banque CCINP :

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.

   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0, 0)$».

2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.