

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner la définition du rang d'une famille et donner la lien avec famille libre, génératrice.

Démonstration: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Montrer que, pour tout $(u, a) \in E \times \mathbb{K}$, on a :

- $a \cdot 0_E = 0_E$ et $0 \cdot u = 0_E$.
- $a \cdot u = 0_E \iff u = 0_E$ ou $a = 0$.

Exercice 1

Dans \mathbb{R}^4 , on considère l'ensemble $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$ et :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On appelle \mathcal{B} la famille $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de F et G .
3. Expliciter $F \cap G$.
4. Montrer que \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^4 et en déduire que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi $\binom{X}{0} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la famille $\left(\binom{X}{0}, \dots, \binom{X}{n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Décomposez P sur la base de la question précédente.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$.
4. Question indépendante : Montrer que $E = F \oplus G$ avec E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner la définition d'un sous-espace affine et d'un sous-espace vectoriel.

Démonstration: Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Montrer que cette famille est libre.

Exercice 1

1. Montrer que la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 2X - 1, 2X^2 + X + 3, X^2 + 4X - 9)$ est liée.
2. Calculer la dimension de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$?
4. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que P appartienne à $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
5. Trouver un supplémentaire de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^4 et F et G les sous-espaces vectoriels de E suivants : $G = \{(a + b, a + b, 2b, a - b); (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ et :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tel que } \begin{cases} x - y + iz - t = 0 \\ ix + y + z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

On note $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_1, \vec{g}_2$ les vecteurs de E définis ci-dessous : $\vec{f}_1 = (1, i, -1, -2i + 1)$, $\vec{f}_2 = (-i, -2 - i, i, 1)$, $\vec{g}_1 = (1, 1, 4, -3)$, $\vec{g}_2 = (6, 6, 4, 2)$.

1. Déterminer une base et la dimension de F et G .
2. Justifier que (\vec{f}_1, \vec{f}_2) est une base de F et (\vec{g}_1, \vec{g}_2) une base de G .
3. Montrer que $E = F \oplus G$.
4. Question indépendante : Soient $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$ et $B = \{ \text{Applications constantes de } [0, 1] \text{ dans } \mathbb{R} \}$. Démontrer que $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = A \oplus B$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner 4 différentes caractérisations des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.

Démonstration: Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

1. Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de \mathcal{C} .
3. Expliciter un supplémentaire de \mathcal{C} dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 . Soit $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = ((2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 0, 2, 1))$$

et $G = \{(x, y, z, t) \in E, 2x + 3y - 4z - t = 0\}$.

1. Montrer que \mathcal{F} est libre. En déduire la dimension de F .
2. Trouver une équation cartésienne de F .
- 3.(a) Soit $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$. Vérifier que $\vec{u} \in F \cap G$.
(b) Déterminer une base de $F \cap G$.
4. En déduire une base de E formée de \vec{u} , d'un autre vecteur de $F \cap G$, d'un vecteur de G et d'un dernier vecteur de E .

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Que peut-on dire de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels ? de l'union ?

Démonstration : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Montrer que, pour tout $(u, a) \in E \times \mathbb{K}$, on a :

- $a \cdot 0_E = 0_E$ et $0 \cdot u = 0_E$.
- $a \cdot u = 0_E \iff u = 0_E$ ou $a = 0$.

Exercice 1

Dans \mathbb{R}^4 , on considère l'ensemble $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$ et :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On appelle \mathcal{B} la famille $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de F et G .
3. Expliciter $F \cap G$.
4. Montrer que \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^4 et en déduire que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi $\binom{X}{0} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la famille $\left(\binom{X}{0}, \dots, \binom{X}{n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Décomposez P sur la base de la question précédente.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$.
4. Question indépendante : Montrer que $E = F \oplus G$ avec E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner la définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires et existence en dimension finie ?

Démonstration : Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés . Montrer que cette famille est libre.

Exercice 1

1. Montrer que la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 2X - 1, 2X^2 + X + 3, X^2 + 4X - 9)$ est liée.
2. Calculer la dimension de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$?
4. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que P appartienne à $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
5. Trouver un supplémentaire de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^4 et F et G les sous-espaces vectoriels de E suivants : $G = \{(a + b, a + b, 2b, a - b); (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ et :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tel que } \begin{cases} x - y + iz - t = 0 \\ ix + y + z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

On note $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_1, \vec{g}_2$ les vecteurs de E définis ci-dessous : $\vec{f}_1 = (1, i, -1, -2i + 1)$, $\vec{f}_2 = (-i, -2 - i, i, 1)$, $\vec{g}_1 = (1, 1, 4, -3)$, $\vec{g}_2 = (6, 6, 4, 2)$.

1. Déterminer une base et la dimension de F et G .
2. Justifier que (\vec{f}_1, \vec{f}_2) est une base de F et (\vec{g}_1, \vec{g}_2) une base de G .
3. Montrer que $E = F \oplus G$.
4. Question indépendante : Soient $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$ et $B = \{ \text{Applications constantes de } [0, 1] \text{ dans } \mathbb{R} \}$. Démontrer que $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = A \oplus B$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Famille libre : si on ajoute un vecteur, est-ce encore libre ? Condition pour que cela reste libre ? Même question quand on en enlève un.

Démonstration : Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

1. Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de \mathcal{C} .
3. Expliciter un supplémentaire de \mathcal{C} dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 . Soit $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = ((2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 0, 2, 1))$$

et $G = \{(x, y, z, t) \in E, 2x + 3y - 4z - t = 0\}$.

1. Montrer que \mathcal{F} est libre. En déduire la dimension de F .
2. Trouver une équation cartésienne de F .
- 3.(a) Soit $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$. Vérifier que $\vec{u} \in F \cap G$.
(b) Déterminer une base de $F \cap G$.
4. En déduire une base de E formée de \vec{u} , d'un autre vecteur de $F \cap G$, d'un vecteur de G et d'un dernier vecteur de E .

MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Que peut-on dire de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels ? de l'union ?

Démonstration : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Montrer que, pour tout $(u, a) \in E \times \mathbb{K}$, on a :

- $a \cdot 0_E = 0_E$ et $0 \cdot u = 0_E$.
- $a \cdot u = 0_E \iff u = 0_E$ ou $a = 0$.

Exercice 1

Dans \mathbb{R}^4 , on considère l'ensemble $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$ et :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On appelle \mathcal{B} la famille $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

1. Montrer que G est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de F et G .
3. Expliciter $F \cap G$.
4. Montrer que \mathcal{B} est une famille génératrice de \mathbb{R}^4 et en déduire que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi $\binom{X}{0} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la famille $\left(\binom{X}{0}, \dots, \binom{X}{n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Décomposez P sur la base de la question précédente.
3. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$.
4. Question indépendante : Montrer que $E = F \oplus G$ avec E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner la définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires et existence en dimension finie ?

Démonstration : Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés . Montrer que cette famille est libre.

Exercice 1

1. Montrer que la famille $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 2X - 1, 2X^2 + X + 3, X^2 + 4X - 9)$ est liée.
2. Calculer la dimension de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
3. A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$?
4. Soit $P = aX^2 + bX + c$ un élément de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que P appartienne à $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.
5. Trouver un supplémentaire de $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 2

Soit E le \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^4 et F et G les sous-espaces vectoriels de E suivants : $G = \{(a + b, a + b, 2b, a - b); (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$ et :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tel que } \begin{cases} x - y + iz - t = 0 \\ ix + y + z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

On note $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_1, \vec{g}_2$ les vecteurs de E définis ci-dessous : $\vec{f}_1 = (1, i, -1, -2i + 1)$, $\vec{f}_2 = (-i, -2 - i, i, 1)$, $\vec{g}_1 = (1, 1, 4, -3)$, $\vec{g}_2 = (6, 6, 4, 2)$.

1. Déterminer une base et la dimension de F et G .
2. Justifier que (\vec{f}_1, \vec{f}_2) est une base de F et (\vec{g}_1, \vec{g}_2) une base de G .
3. Montrer que $E = F \oplus G$.
4. Question indépendante : Soient $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$ et $B = \{ \text{Applications constantes de } [0, 1] \text{ dans } \mathbb{R} \}$. Démontrer que $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = A \oplus B$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Famille libre : si on ajoute un vecteur, est-ce encore libre ? Condition pour que cela reste libre ? Même question quand on en enlève un.

Démonstration : Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

1. Montrer que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base et la dimension de \mathcal{C} .
3. Expliciter un supplémentaire de \mathcal{C} dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^4 . Soit $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où

$$\mathcal{F} = ((2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 0, 2, 1))$$

et $G = \{(x, y, z, t) \in E, 2x + 3y - 4z - t = 0\}$.

1. Montrer que \mathcal{F} est libre. En déduire la dimension de F .
2. Trouver une équation cartésienne de F .
- 3.(a) Soit $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$. Vérifier que $\vec{u} \in F \cap G$.
(b) Déterminer une base de $F \cap G$.
4. En déduire une base de E formée de \vec{u} , d'un autre vecteur de $F \cap G$, d'un vecteur de G et d'un dernier vecteur de E .