

## EXERCICE 56 analyse

### Énoncé exercice 56

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ .

1.  $f$  admet-elle des extrema locaux sur  $\mathbb{R}^2$ ? Si oui, les déterminer.
2.  $f$  admet-elle des extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.
3. On pose  $K = [0, 1] \times [0, 1]$ .  
Justifier, oralement, que  $f$  admet un maximum global sur  $K$  puis le déterminer.

### Corrigé exercice 56

1.  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert.

**Déterminons les points critiques de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .**

On a :  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + 6y$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6x - 6y$ .

$$\begin{cases} 6x^2 + 6y = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 & \text{et } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 & \text{et } y = -1 \end{cases}$$

Donc  $f$  admet 2 points critiques sur  $\mathbb{R}^2$  :  $(0, 0)$  et  $(-1, -1)$ .

Donc si  $f$  admet un extremum en  $a$  alors  $a = (0, 0)$  ou  $a = (-1, -1)$ .

On a :  $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 6$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6$ .

**Étudions la matrice hessienne de  $f$  en  $(0, 0)$ .**

Notons  $H_1 = H_f((0, 0))$  la matrice hessienne de  $f$  en  $(0, 0)$ .

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{pmatrix} \text{ donc } H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\det H_1 = -36 < 0$ .

Donc  $H_1$  admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative.

Donc  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0, 0)$ .

**Étudions la matrice hessienne de  $f$  en  $(-1, -1)$ .**

Notons  $H_2 = H_f((-1, -1))$  la matrice hessienne de  $f$  en  $(-1, -1)$ .

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, -1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) \end{pmatrix} \text{ donc } H_2 = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$\det H_2 = 12 \times 6 - 36 = 36 > 0$ .

De plus,  $\text{tr}(H_2) = -18 < 0$ .

Donc  $H_2$  admet deux valeurs propres strictement négatives.

Donc  $f$  admet en  $(-1, -1)$  un maximum local qui vaut  $f(-1, -1) = 3$ .

**Conclusion** :  $f$  admet uniquement un maximum local atteint en  $(-1, -1)$  et n'admet pas de minimum local.

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + 2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 2 = -\infty$ .

Donc  $f$  n'admet pas d'extrema globaux sur  $\mathbb{R}^2$ .

3.  $K$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^2$ .

$K$  est un produit de fermés de  $\mathbb{R}^2$  donc  $K$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

Donc, comme  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie,  $K$  est un compact.

Or  $f$  est clairement continue sur  $K$ .

Donc  $f$  est bornée sur  $K$  et atteint ses bornes.

Donc  $f$  admet un maximum global sur  $K$  et atteint ce maximum.

Si  $f$  atteint ce maximum en  $a \in \overset{\circ}{K}$ , qui est un ouvert, alors  $a$  est un point critique.

Or, les deux seuls points critiques de  $f$  n'appartiennent pas à  $\overset{\circ}{K}$ .

Donc  $f$  atteint son maximum en un point  $a$  du bord  $\partial K$  de  $K$ .

On pose :

$L_1 = \{(x, 0), x \in [0, 1]\}$ ,  $L_2 = \{(1, y), y \in [0, 1]\}$ ,  $L_3 = \{(x, 1), x \in [0, 1]\}$  et  $L_4 = \{(0, y), y \in [0, 1]\}$ .

On a alors :  $\partial K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ .

**Etude de  $f$  sur  $L_1$  :**

$$g_1(x) = f(x, 0) = 2x^3 + 2.$$

$g_1$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

$$\text{Donc } \sup_{x \in [0, 1]} g_1(x) = g_1(1) = 4.$$

**Etude de  $f$  sur  $L_2$  :**

$$g_2(y) = f(1, y) = 4 + 6y - 3y^2.$$

$\forall y \in [0, 1]$ ,  $g_2'(y) = 6 - 6y \geq 0$  donc  $g_2$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

$$\text{Donc } \sup_{y \in [0, 1]} g_2(x) = g_2(1) = 7.$$

**Etude de  $f$  sur  $L_3$  :**

$$g_3(x) = f(x, 1) = 2x^3 + 6x - 1.$$

$g_3$  est croissante sur  $[0, 1]$ .

$$\text{Donc } \sup_{x \in [0, 1]} g_3(x) = g_3(1) = 7.$$

**Etude de  $f$  sur  $L_4$  :**

$$g_4(y) = f(0, y) = -3y^2 + 2.$$

$g_4$  est décroissante sur  $[0, 1]$ .

$$\text{Donc } \sup_{y \in [0, 1]} g_4(y) = g_4(0) = 2.$$

**Conclusion :**

On en déduit que  $f$  admet 7 comme maximum global sur  $K$  et que ce maximum est atteint en  $(1, 1)$ .

## EXERCICE 52 analyse

### Énoncé exercice 52

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Prouver que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. (a) Justifier que le domaine de définition de  $f$  est bien  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .  
(a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.  
(b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.  
(c)  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### Corrigé exercice 52

1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  $x^2 + y^2 - xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2xy) = \frac{1}{2}(x - y)^2 \geq 0$ .  
Donc  $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .
2. (a) Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
D'après 1.,  $x^2 + y^2 - xy = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$ .  
Ainsi,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) D'après les théorèmes généraux,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .  
D'après 1., pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $0 \leq f(x, y) \leq \frac{2y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2}$ .  
Ainsi,  $0 \leq f(x, y) \leq 2(x^2 + y^2) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 0$ .  
Or :  $f$  est continue en  $(0, 0) \iff f(x, y) \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(0, 0) = \alpha$ .  
Donc :  $f$  est continue en  $(0, 0) \iff \alpha = 0$ .  
Conclusion :  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \iff \alpha = 0$ .
3. (a) D'après les théorèmes généraux,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .  
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^4(2x - y)}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2 - xy)^2}$ .  
(b) Pour tout  $x \neq 0$ ,  $\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .  
Pour tout  $y \neq 0$ ,  $\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = y \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .  
(c) Pour montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , montrons que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .  
Pour cela, il suffit de montrer qu'elles sont continues en  $(0, 0)$ .  
 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , on note  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . On a alors  $|x| \leq r$  et  $|y| \leq r$ .  
De plus,  $(x, y) \rightarrow (0, 0) \iff r \rightarrow 0$ .  
D'après 1. et l'inégalité triangulaire,  
 $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| \leq 4 \frac{|y^4(2x - y)|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 \frac{r^4(2r + r)}{r^4} = 12r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ .  
 $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| \leq 4 \frac{|2y^5 - 3xy^4 + 4x^2y^3|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 4 \frac{2r^5 + 3r^5 + 4r^5}{r^4} = 36r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ .

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0,0)$  et par suite sur  $\mathbb{R}^2$ .

Ainsi,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## EXERCICE 57 analyse

### Énoncé exercice 57

- Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .
  - Donner la définition de « $f$  différentiable en  $(0, 0)$ ».
- On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 
  - Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
  - Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Corrigé exercice 57

- $f$  est continue en  $(0, 0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| < \alpha \implies |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$ .  
 $\|\cdot\|$  désigne une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^2$  puisque toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^2$  (espace de dimension finie).
  - $f$  est différentiable en  $(0, 0) \iff \exists L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  / au voisinage de  $(0, 0)$ ,  
 $f(x, y) = f(0, 0) + L(x, y) + o(\|(x, y)\|)$ .

**Remarque** : Comme  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie, si  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  alors  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

- On notera  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 On remarque que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \|(x, y)\|$  et  $|y| \leq \|(x, y)\|$  (\*).
  - $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  et  $(x, y) \mapsto xy(x^2 - y^2)$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  donc,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Continuité en  $(0, 0)$  :

On a, en utilisant (\*) et l'inégalité triangulaire,  $|f(x, y) - f(0, 0)| = \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \cdot |y| \leq \|(x, y)\|^2$ .

Donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$ .

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent sur  $\mathbb{R}^2$  et sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

$f$  admet des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et elles sont continues sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

De plus,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$ . (\*\*)

Existence des dérivées partielles en  $(0, 0)$  :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ ; donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ .

De même,  $\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$ , donc  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$ ; donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Continuité des dérivées partielles en  $(0, 0)$  :

D'après (\*) et (\*\*),  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq \frac{x^4 |y| + 4x^2 |y|^3 + |y|^5}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{6\|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6\|(x, y)\| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{6\|(x, y)\|^5}{\|(x, y)\|^4} = 6\|(x, y)\|.$$

Donc  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues en  $(0, 0)$ .

Conclusion :  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  existent et sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

a) Soit  $a \in E$ . On peut écrire

$$f(a+h) = \frac{1}{2} \left( (u(a) | a) + (u(a) | h) + (u(h) | a) + (u(h) | h) \right) + (x_0 | a) + (x_0 | h)$$

Sachant  $(u(h) | a) = (u(a) | h)$ , on obtient

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + (u(h) | h)$$

avec  $\ell$  la forme linéaire donnée par

$$\ell(h) = (u(a) + x_0 | h)$$

Puisque

$$|(u(h) | h)| \leq \|u(h)\| \|h\| \quad \text{avec} \quad \|u(h)\| \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0$$

on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$$

Finalement  $f$  est différentiable en  $a$  et

$$df(a).h = (u(a) + x_0 | h)$$

b) Le gradient de  $f$  en  $a$  est alors

$$\text{grad } f(a) = u(a) + x_0$$

a) Soit  $h = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\frac{1}{t}(f(t.h) - f(0,0)) = \frac{1}{t}(f(t\alpha, t\beta)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = 0 \\ \beta^2/\alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$D_h f(0,0) = \begin{cases} \beta^2/\alpha & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(1/n, 1/\sqrt{n}) = 1 \rightarrow 1 \neq f(0,0)$$

donc  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

- a) Quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , on peut écrire  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ .

On a alors

$$f(x, y) = 2r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \ln r \rightarrow 0$$

car  $r^2 \ln r \rightarrow 0$

On prolonge  $f$  par continuité en  $(0, 0)$  en posant  $f(0, 0) = 0$ .

- b)  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  par opérations. On observe  $f(x, y) = -f(y, x)$  donc en dérivant cette relation en la variable  $x$  on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$$

- c) On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$$

et de même  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

Quand  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , on peut écrire  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4r \ln r + 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \rightarrow 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

Points critiques  $(0, 1)$  et  $(0, e^{-2})$ .

En  $(0, 1)$  :

$$f(0, 1) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0$$

C'est un minimum global.

En  $(0, e^{-2})$  :

$$rt - s^2 = -4 < 0$$

Ce n'est pas un extremum local.

Points critiques  $(0, 1)$  et  $(0, e^{-2})$ .

En  $(0, 1)$  :

$$f(0, 1) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0$$

C'est un minimum global.

En  $(0, e^{-2})$  :

$$rt - s^2 = -4 < 0$$

Ce n'est pas un extremum local.

b) L'annulation des dérivées partielles conduit à Vect  $(3, -5, 1)$  droite de points critiques.

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , étudions le point critique  $(3x, -5x, x)$ . Pour  $t \neq 0$ , on a

$$f((3x, -5x, x) + (t, 0, 0)) = 2t^2 > 0 \text{ et } f((3x, -5x, -x) + (0, 0, t)) = -2t^2 < 0$$

et donc  $(3x, -5x, x)$  n'est pas extremum local.

c) La fonction  $f$  est une forme quadratique, en introduisant la matrice représentative

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$f(x, y, z) = {}^t X M X \text{ avec } X = {}^t (x \ y \ z)$$

La matrice  $M$  est symétrique réelle. Pour calculer son polynôme caractéristique, je n'ai pas trouvé plus simple que d'appliquer Sarrus... On obtient les valeurs propres  $-5/2, 0$  et  $7/2$ .

En exploitant une base orthonormée de diagonalisation, on obtient

$$-\frac{5}{2} {}^t X X \leq f(x) = {}^t X M X \leq \frac{7}{2} {}^t X X$$

Les valeurs extrêmes de la fonction  $f$  dans la boule unité fermée sont donc  $-5/2$  et  $7/2$  et celles-ci sont prises sur les vecteurs propres unitaires associés.