MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Famille génératrice : si on enlève un vecteur, est-ce encore générateur ? Condition pour que cela reste générateur ? Même question quand on en rajoute un.
Démonstration: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que toute famille de E à n éléments qui est libre ou génératrice est une base de E.

Exercice 1

1. Soient A l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 dont la trace vaut 0 (la trace d'une matrice étant la somme de ses éléments diagonaux). Démontrer que A est un espace vectoriel et déterminer une base de A.
2. Soient A l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(1) = 0$ et B l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X$ tel que $P(1) = P(2)$.
   (a) Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels.
   (b) Déterminer une base de A et une base de B.
   (c) Démontrer que $A \cap B$ est un espace vectoriel et déterminer une base de $A \cap B$.

Exercice 2

On note S l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles pour tout entier naturel } n, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que S est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S.
3. Montrer que $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0\}$ est un sous- espace vectoriel de S et en donner une base.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Citer le théorème de la base incomplète et de la base extraite.
Démonstration: Caractérisation de la liberté par le rang.

Exercice 1

On pose :

$$A = \{ P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(4) = 0 \} \quad \text{et} \quad B = \{ Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q'(4) = 0 \}.$$

1. Montrer que A et B sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de A, B et $A \cap B$.
3. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = A + B$.
4. Trouver un supplémentaire de A dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1. Trouver la dimension de A avec $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ b & a+3b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.
2. Trouver un supplémentaire de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites arithmétiques.
4. Trouver la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f affines.
5. Trouver la dimension de B avec B le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f continues sur $[0, 2]$ telles que f restreinte à $[0, 1]$ soit une fonction affine et f restreinte à $[1, 2]$ soit aussi une fonction affine.

MP2I **Sujet 3** Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication: Dimension et famille libre ?
Démonstration: Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \cdots$.

Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{Vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2), (3, 11, 2, -1)).$$

1. Donner une base de $F \cap G$, puis sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. En déduire que $H = F \cap G$.
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \right\}$$
$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, -1, -1, 0), e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1+\lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1+\lambda, -1-\lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de V_λ et une base de V_λ pour tout réel λ.
3. Montrer que $V_{-1} = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a + b = a + c = 0\}$.
4. Soit λ un réel. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.

MP2I **Sujet 1**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Compléter : Soient u, v et w trois vecteurs de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- (u) est une famille libre si et seulement si ....
- (u, v) est une famille libre si et seulement si ....
- Soit $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ une famille de polynômes .... dont les degrés sont ..... alors cette famille est libre.

Démonstration : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que toute famille de E à n éléments qui est libre ou génératrice est une base de E.

Exercice 1

1. Soient A l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 dont la trace vaut 0 (la trace d'une matrice étant la somme de ses éléments diagonaux). Démontrer que A est un espace vectoriel et déterminer une base de A.
2. Soient A l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(1) = 0$ et B l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_3[X$ tel que $P(1) = P(2)$.
   (a) Démontrer que A et B sont des espaces vectoriels.
   (b) Déterminer une base de A et une base de B.
   (c) Démontrer que $A \cap B$ est un espace vectoriel et déterminer une base de $A \cap B$.

Exercice 2

On note S l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles pour tout entier naturel } n, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que S est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de S.
3. Montrer que $\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$ est un sous- espace vectoriel de S et en donner une base.

MP2I **Sujet 2**
Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:
cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Compléter : Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de E.

- Si $e_{n+1} \in$ Vect $(e_1, \cdots, e_n)$ alors Vect $(e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}) = \cdots$.
- Si $e_{n+1} \notin$ Vect $(e_1, \cdots, e_n)$ et si $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille libre alors ...

Démonstration : Caractérisation de la liberté par le rang.

Exercice 1

On pose :

$$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(4) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q'(4) = 0\}.$$

1. Montrer que A et B sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de A, B et $A \cap B$.
3. Montrer que $\mathbb{R}_3[X] = A + B$.
4. Trouver un supplémentaire de A dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1. Trouver la dimension de A avec $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ b & a+3b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$.
2. Trouver un supplémentaire de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites arithmétiques.
4. Trouver la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f affines.
5. Trouver la dimension de B avec B le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f continues sur $[0,2]$ telles que f restreinte à $[0,1]$ soit une fonction affine et f restreinte à $[1,2]$ soit aussi une fonction affine.

MP2I **Sujet 3** Semaine de colle: 22 — Sujet disponible sur: cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

Colles de mathématiques de M Bacquelin

Définition et QC

Définition/ Explication : Dimension et famille génératrice ?
Démonstration : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \cdots$.

Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\} \\ G &= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \right\} \\ H &= \mathrm{vect}((-3,1,1,1),(6,2,-1,-2),(3,11,2,-1)). \end{aligned}$$

1. Donner une base de $F \cap G$, puis sa dimension.
2. Montrer que $H \subset F \cap G$.
3. En déduire que $H = F \cap G$.
4. Recommencer l'exercice avec :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\} \\ G &= \left\{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \right\} \\ H &= \mathrm{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3). \end{aligned}$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0\}$. Pour tout réel λ, on définit les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1,-1,-1,0), e_{2,\lambda} = (1,\lambda,\lambda,-1), e_{3,\lambda} = (2,-1+\lambda,-2,-\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1+\lambda,-1-\lambda,0,1).$$

Pour tout réel λ, on appelle V_λ l'espace engendré par e_1, $e_{2,\lambda}$, $e_{3,\lambda}$ et $e_{4,\lambda}$.

1. Montrer que U est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de V_λ et une base de V_λ pour tout réel λ.
3. Montrer que $V_{-1} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a + b = a + c = 0\}$.
4. Soit λ un réel. Déterminer une base de $U \cap V_\lambda$.