

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition du noyau d'une application linéaire, d'une matrice. Lien avec l'injectivité?

Démonstration: Montrer que si $f \in GL(E, F)$, avec E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, alors $f^{-1} \in GL(F, E)$.

Exercice 1

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x^2, 0) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_9[X] & \rightarrow \mathbb{R}_9[X] \\ P & \mapsto P - P' \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + 1, y) \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, y, 0) \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.
3. Y-a-t-il ds projecteurs/symétries dans cet exercice ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application canoniquement associée à J la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Expliciter f .
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une matrice D simple associée à f .
5. Quel est le lien entre D et J ?

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir le rang d'une famille, d'une application linéaire, d'une matrice et d'un système.

Démonstration: Montrer que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ... et $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ... avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 1

1. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$g(1) = 1 + X + X^2, g(X) = X + X^2 \text{ et } g(X^2) = 2.$$

- Montrer que g existe et est unique puis expliciter g .
 - Déterminer le noyau de g .
 - Déterminer l'image de g .
 - Déterminer la matrice canoniquement associée à g .
2. Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soit f l'endomorphisme de E tel que : $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 2e_1$. Recommencez les mêmes questions (matrice dans base (e_1, e_2, e_3) pour la dernière question).

Exercice 2

Soit M la matrice canoniquement associée à f avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (5x - 3y - z, 6x - 4y - z, 2x - y).$$

- Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
- Déterminer un vecteur u_1 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
 - Déterminer un vecteur u_2 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, tel que : $f(u_2) - u_2 = u_1$.
 - Déterminer un vecteur u_3 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Montrer que (u_1, u_2, u_3) et $(-u_1, u_2, u_3)$ sont des bases de \mathbb{R}^3 et donner les matrices M_1 et M_2 de f dans ces bases.
- Calculer $M_1 M_2$ et en déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 23

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Projecteur : définition ? Quelques propriétés ?

Démonstration: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Expliciter noyau et image de g avec :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{cases}.$$

2. Après avoir prouvé son existence, expliciter l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(3, 2) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 4) = (1, 1).$$

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice canoniquement associée est A avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \mathcal{B} \text{ désignera la base canonique de } \mathbb{R}^3, n \text{ un entier naturel.}$$

1. f est-elle bien définie ?
2. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de \mathbb{R}^3 , en déterminer son rang, son noyau et son image.
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
4. Montrer que $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soient $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w .
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
8. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D .
9. On pose $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1} .

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition du noyau d'une application linéaire, d'une matrice. Lien avec l'injectivité?

Démonstration: Montrer que si $f \in GL(E, F)$, avec E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, alors $f^{-1} \in GL(F, E)$.

Exercice 1

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x^2, 0) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_9[X] & \rightarrow \mathbb{R}_9[X] \\ P & \mapsto P - P' \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + 1, y) \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, y, 0) \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.
3. Y-a-t-il ds projecteurs/symétries dans cet exercice ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application canoniquement associée à J la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Expliciter f .
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une matrice D simple associée à f .
5. Quel est le lien entre D et J ?

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir le rang d'une famille, d'une application linéaire, d'une matrice et d'un système.

Démonstration: Montrer que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ... et $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ... avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 1

1. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$g(1) = 1 + X + X^2, g(X) = X + X^2 \text{ et } g(X^2) = 2.$$

- Montrer que g existe et est unique puis expliciter g .
 - Déterminer le noyau de g .
 - Déterminer l'image de g .
 - Déterminer la matrice canoniquement associée à g .
2. Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soit f l'endomorphisme de E tel que : $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 2e_1$. Recommencez les mêmes questions (matrice dans base (e_1, e_2, e_3) pour la dernière question).

Exercice 2

Soit M la matrice canoniquement associée à f avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (5x - 3y - z, 6x - 4y - z, 2x - y).$$

- Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
- (a) Déterminer un vecteur u_1 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
 (b) Déterminer un vecteur u_2 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, tel que : $f(u_2) - u_2 = u_1$.
 (c) Déterminer un vecteur u_3 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Montrer que (u_1, u_2, u_3) et $(-u_1, u_2, u_3)$ sont des bases de \mathbb{R}^3 et donner les matrices M_1 et M_2 de f dans ces bases.
- Calculer $M_1 M_2$ et en déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 23

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication: Projecteur : définition ? Quelques propriétés ?

Démonstration: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Expliciter noyau et image de g avec :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{cases}.$$

2. Après avoir prouvé son existence, expliciter l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(3, 2) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 4) = (1, 1).$$

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice canoniquement associée est A avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \mathcal{B} \text{ désignera la base canonique de } \mathbb{R}^3, n \text{ un entier naturel.}$$

1. f est-elle bien définie ?
2. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de \mathbb{R}^3 , en déterminer son rang, son noyau et son image.
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
4. Montrer que $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soient $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w .
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
8. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D .
9. On pose $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1} .

Définition et QC

Définition/ Explication : Définition de l'image d'une application linéaire, d'une matrice. Lien avec la surjectivité?

Démonstration : Montrer que si $f \in GL(E, F)$, avec E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, alors $f^{-1} \in GL(F, E)$.

Exercice 1

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x^2, 0) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_9[X] & \rightarrow \mathbb{R}_9[X] \\ P & \mapsto P - P' \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x + 1, y) \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x + y, y, 0) \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.
3. Y-a-t-il ds projecteurs/symétries dans cet exercice ?

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f l'application canoniquement associée à J la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Expliciter f .
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
4. Déterminer une matrice D simple associée à f .
5. Quel est le lien entre D et J ?

Définition et QC

Définition/ Explication : Définir le rang d'une application linéaire et dire le rapport avec le côté injectif, surjectif.

Démonstration : Montrer que $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ... et $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ... avec $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exercice 1

1. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que :

$$g(1) = 1 + X + X^2, g(X) = X + X^2 \text{ et } g(X^2) = 2.$$

- Montrer que g existe et est unique puis expliciter g .
 - Déterminer le noyau de g .
 - Déterminer l'image de g .
 - Déterminer la matrice canoniquement associée à g .
2. Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soit f l'endomorphisme de E tel que : $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, f(e_2) = e_2 + e_3$ et $f(e_3) = 2e_1$. Recommencez les mêmes questions (matrice dans base (e_1, e_2, e_3) pour la dernière question).

Exercice 2

Soit M la matrice canoniquement associée à f avec $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (5x - 3y - z, 6x - 4y - z, 2x - y).$$

- Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.
- Déterminer un vecteur u_1 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
 - Déterminer un vecteur u_2 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, tel que : $f(u_2) - u_2 = u_1$.
 - Déterminer un vecteur u_3 de \mathbb{R}^3 , de première composante égale à 1, appartenant à $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
- Montrer que (u_1, u_2, u_3) et $(-u_1, u_2, u_3)$ sont des bases de \mathbb{R}^3 et donner les matrices M_1 et M_2 de f dans ces bases.
- Calculer $M_1 M_2$ et en déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 23

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Définition et QC

Définition/ Explication : Symétrie : définition ? Quelques propriétés ?

Démonstration : Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que E et F sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Exercice 1

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Expliciter noyau et image de g avec :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y + \alpha z + t, x + z + t, y + z) \end{cases}.$$

2. Après avoir prouvé son existence, expliciter l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 telle que :

$$f(3, 2) = (1, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 4) = (1, 1).$$

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice canoniquement associée est A avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \mathcal{B} \text{ désignera la base canonique de } \mathbb{R}^3, n \text{ un entier naturel.}$$

1. f est-elle bien définie ?
2. Montrer que f est un endomorphisme bijectif de \mathbb{R}^3 , en déterminer son rang, son noyau et son image.
3. Déterminer le rang de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
4. Montrer que $u = (1, 1, 1)$ appartient au noyau de $f - id_{\mathbb{R}^3}$.
5. En déduire $\text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$.
6. Soient $v = (1, -1, 1)$ et $w = (4, 2, 1)$. Déterminer $f(v)$ et $f(w)$ en fonction de v et de w .
7. Montrer que $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
8. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$. Expliciter D .
9. On pose $P = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$. Expliciter P et montrer que P est inversible puis exprimer A^n à l'aide de P, D, n et P^{-1} .