

CORRIGÉ DE CET EXERCICE AVEC PRÉPARATION

**Question de cours :** Définition d'une base orthonormée dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 1$ .

Une base orthonormée dans  $\mathbb{R}^n$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  orthogonale (ce qui signifie qu'elle est constituée de vecteurs deux-à-deux orthogonaux, i.e; de produit scalaire nul) et dont les vecteurs sont normés (leur norme vaut 1).

**Exercice :** Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- Chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année.
- La probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de souris femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an, et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans. Notons pour tout entier naturel  $n$ , après  $n$  années,  $j_n$  le nombre de jeunes souris femelles et  $a_n$  le nombre de souris adultes femelles.  $n$  désignera dans tout ce problème un entier naturel.

1. (a) Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant : 
$$\begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n \\ a_{n+1} &= 0,25j_n \end{cases}$$

i. Comptons le nombre de souris adultes femelles après  $n + 1$  années. D'après l'énoncé, ce sont uniquement les souris jeunes de l'année d'avant (elles étaient  $j_n$ ) qui ont survécu car les souris n'ont aucune chance de survie au-delà de la deuxième année. Comme la probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25, on obtient bien que  $a_{n+1} = 0,25j_n$ .

ii. Pour les jeunes souris, on a :

- Les bébés femelles des souris jeunes de l'année d'avant (elles étaient  $j_n$ ) : on en a  $j_n$  car chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie.
- Les bébés femelles des souris adultes de l'année d'avant (elles étaient  $a_n$ ) : on en a  $8a_n$  car chacune des souris donne naissance en moyenne à 8 femelles pendant sa deuxième année.

On a bien 
$$\begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n \\ a_{n+1} &= 0,25j_n \end{cases}.$$

(b) On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur  $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$ . Expliciter alors une matrice  $L$  telle que, pour tout entier naturel  $n$ , on ait :  $S_{n+1} = LS_n$ .

Posons  $L = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$ . On a :

$$\begin{aligned} LS_n &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j_n + 8a_n \\ 0,25j_n \end{pmatrix} \\ &= S_{n+1} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

2. En déduire une expression de  $S_n$  en fonction de  $L$ ,  $S_0$  et  $n$ .

Par récurrence immédiate, on obtient que  $S_n = L^n S_0$ . Effectuons tout de même cette récurrence : Pour tout entier naturel  $n$ , on appelle  $\mathcal{P}_n$  l'hypothèse :

$$\mathcal{P}_n : " S_n = L^n \times S_0 ".$$

$\mathcal{P}_0$  est vraie car  $L^0 S_0$  est  $I_2 S_0$ , soit  $S_0$  donc  $L^0 S_0 = S_0$ . On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie pour un certain entier naturel  $n$ , montrons que  $\mathcal{P}_{n+1}$  est alors vraie. On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= LS_n \text{ d'après la question précédente} \\ &= L \times L^n \times S_0 \text{ d'après } \mathcal{P}_n \\ &= L^{n+1} \times S_0 \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie si  $\mathcal{P}_n$  l'est.  $\mathcal{P}_0$  est vraie et pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{P}_n$  implique  $\mathcal{P}_{n+1}$ .  $\mathcal{P}_n$  est donc vraie pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe de récurrence. On a donc prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = L^n S_0.$$

3. (a) Montrer que  $L$  est diagonalisable.

Soit  $\lambda$  un complexe. On sait que  $\lambda$  est valeur propre de  $L$  si et seulement si la matrice  $L - \lambda I_2$  est non inversible, soit si et seulement si son déterminant est nul. Or :

$$\begin{aligned} \det(L - \lambda I_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0,25 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= -\lambda(1-\lambda) - 0,25 \times 8 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $L$  sont les racines de ce trinôme, c'est  $\frac{1+\sqrt{9}}{2}$  et  $\frac{1-\sqrt{9}}{2}$ , soit 2 et  $-1$ .  $L$  a donc deux valeurs propres distinctes. Or  $L$  est d'ordre 2,  $L$  est donc diagonalisable.

(b) Déterminer  $(U_1; U_2)$  une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $L$ .

Soit  $x$  un réel, on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in E_2 &\Leftrightarrow L \times \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+8x &= 2 \\ 0,25 &= 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+1 &= 2 \\ 0,125 &= x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

d'où  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$  est un élément de  $E_2$ . Comme  $E_2$  est une espace vectoriel,  $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$  est aussi un élément de  $E_2$ , on l'appelle  $U_1$ .

(c) On a aussi :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in E_{-1} &\Leftrightarrow L \times \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+8x &= -1 \\ 0,25 &= -x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2 &= -1 \\ -0,25 &= x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où  $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$  est un élément de  $E_{-1}$ . Comme  $E_{-1}$  est une espace vectoriel,  $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  est aussi un élément de  $E_{-1}$ , on l'appelle  $U_2$ .  $(U_1; U_2)$  est une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  car cette famille a les trois qualités suivantes :

- Cette famille a le bon nombre d'éléments (elle a deux éléments et  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  est un espace de dimension 2).
- Cette famille est libre (elle a uniquement deux vecteur et ils sont non colinéaires).
- Cette famille est une famille de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

De plus, on constate bien que cette famille est constituée de vecteurs propres de  $L$  d'après les calculs précédents.  $(U_1; U_2)$  est donc une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $L$ .

(d) Soient  $\lambda$  et  $\mu$  les coordonnées de  $S_0$  dans la base  $(U_1; U_2)$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $n$ .

D'après la question précédente, en posant  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on a alors :

$$L = P \times D \times P^{-1}.$$

et  $L^n = PD^nP^{-1}$  (par récurrence immédiate), soit  $L^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$ . De  $S_n = L^n S_0$ , on déduit alors :

$$\begin{aligned} P^{-1}S_n &= P^{-1}L^n S_0 \\ &= P^{-1}P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}S_0 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}S_0 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \text{ par définition de } \lambda \text{ et } \mu \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \lambda \\ (-1)^n \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} S_n &= P \begin{pmatrix} 2^n \lambda \\ (-1)^n \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n \lambda \\ (-1)^n \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 \times 2^n \lambda - 4 \times (-1)^n \mu \\ 2^n \lambda + (-1)^n \mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+3} \lambda + 4 \times (-1)^{n+1} \mu \\ 2^n \lambda + (-1)^n \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :  $S_n = \begin{pmatrix} 2^{n+3} \lambda + 4 \times (-1)^{n+1} \mu \\ 2^n \lambda + (-1)^n \mu \end{pmatrix}$ .

4. On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.

(a) Écrire un programme informatique qui permet de retourner les listes  $[j_0; j_1; \dots; j_{10}]$  et  $[a_0; a_1; \dots; a_{10}]$ .

Voici un programme informatique qui permet de retourner les listes  $[j_0; j_1; \dots; j_{10}]$  et  $[a_0; a_1; \dots; a_{10}]$  :

```

1 def souris():
2     a=[0]
3     j=[20]
4     u=20
5     v=0
6     for k in range(10):
7         c=u
8         u=u+8*v
9         v=c/4
10        j.append(u)
11        a.append(v)
12    return (j,a)
13

```

On a obtenu :

```

1 In [14]: souris()
2 Out[14]:
3 ([20, 20, 60.0, 100.0, 220.0, 420.0, 860.0, 1700.0, 3420.0, 6820.0, 13660.0],
4  [0, 5.0, 5.0, 15.0, 25.0, 55.0, 105.0, 215.0, 425.0, 855.0, 1705.0])
5

```

(b) Exprimer  $j_n$  et  $a_n$  en fonction de  $n$ .

On a vu que :  $S_n = \begin{pmatrix} 2^{n+3} \lambda + 4 \times (-1)^{n+1} \mu \\ 2^n \lambda + (-1)^n \mu \end{pmatrix}$  avec  $\lambda$  et  $\mu$  les coordonnées de  $S_0$  dans la base  $(U_1; U_2)$ . Or

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= S_0 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\lambda = \frac{5}{3}$  et  $\mu = -\frac{5}{3}$  et donc :

$$j_n = 2^{n+3} \frac{5}{3} + 4 \times (-1)^n \frac{5}{3} \text{ et } a_n = 2^n \frac{5}{3} - (-1)^n \frac{5}{3}.$$

- (c) On désigne par  $t_n$  le nombre total de souris femelles après  $n$  années. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} t_n &= j_n + a_n \\ &= 2^{n+3} \frac{5}{3} + 4 \times (-1)^n \frac{5}{3} + 2^n \frac{5}{3} - (-1)^n \frac{5}{3} \\ &= 2^n \times \left( \frac{40}{3} + \frac{5}{3} \right) + \left( \frac{20}{3} - \frac{5}{3} \right) (-1)^n \\ &= 2^n \times \frac{45}{3} + \frac{15}{3} \times (-1)^n \\ &= 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n \end{aligned}$$

- (d) Déterminer la limite de  $\left( \frac{t_{n+1}}{t_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  et interpréter ce résultat.

De  $t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$ , on déduit que  $t_n \underset{+\infty}{\sim} 15 \times 2^n$  car, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\frac{t_n}{15 \times 2^n} = 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{-1}{2} \right)^n$$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{-1}{2} \right)^n \right) = 0$  (suite géométrique de raison  $\frac{-1}{2}$ , raison qui appartient à  $] -1, 1[$ ). On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{t_{n+1}}{t_n} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{15 \times 2^{n+1}}{15 \times 2^n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} 2 \end{aligned}$$

On en déduit que la limite de  $\left( \frac{t_{n+1}}{t_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  vaut 2. Le nombre total de souris femelles tend donc à doubler chaque année.

- (e) Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre la population? Proposer un programme pour le vérifier.

$j_n = 2^{n+3} \frac{5}{3} + 4 \times (-1)^n \frac{5}{3}$  et  $a_n = 2^n \frac{5}{3} - (-1)^n \frac{5}{3}$  donnent :

$$j_n \underset{+\infty}{\sim} 2^{n+3} \frac{5}{3} \text{ et } a_n \underset{+\infty}{\sim} 2^n \frac{5}{3}$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{j_n}{a_n} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{n+3} \frac{5}{3}}{2^n \frac{5}{3}} \\ &\underset{+\infty}{\sim} 8 \end{aligned}$$

On vient donc de prouver que la répartition jeunes/adultes dans la population semble tendre vers 8. On fait ce programme pour le vérifier :

```

1 def r_patrition(N):
2     a=[0]
3     j=[20]
4     u=20
5     v=0
6     for k in range(N):
7         c=u
8         u=u+8*v

```

```
9     v=c/4
10     j.append(u)
11     a.append(v)
12     return (j[N]/a[N])
13
```

On a obtenu :

```
1 In [18]: repatrition(5)
2 Out[18]: 7.636363636363637
3
4 In [19]: repatrition(50)
5 Out[19]: 8.000000000000001
6
```

**Question de cours :** Quand dit-on qu'une fonction est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle? Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une densité de probabilité si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $f$  est positive ou nulle.
- $f$  est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ( $f$  y est tout de même définie).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  converge et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ .

### Exercice.

$k$  et  $n$  désigneront des entiers naturels dans ce sujet. Un agent biologique pathogène se déplace et multiplie dans l'air par division de chaque cellule en deux cellules identiques. Les cellules sont initialement immortelles, puis neutralisées par un agent désinfectant pulvérisé pour combattre l'infection. On discrétise le temps en instants successifs séparés d'une durée  $\delta t$ , et on note pour tout entier naturel  $n$  :

- $U_n$  le nombre de cellules pathogènes actives en suspension à l'instant  $n\delta t$ . On admet l'existence de  $E(U_n)$ .
- $X_n$  et  $Y_n$  le nombre de cellules actives respectivement divisées / neutralisées entre  $n\delta t$  et  $(n+1)\delta t$ .

On admet que  $\sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} f(i, k) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} f(i, k) \right)$  est vrai si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{N}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$
- Pour tout entier naturel  $k$ ,  $\sum_{i=0}^k f(i, k)$  converge
- La série de terme général  $\sum_{i=0}^{+\infty} f(i, k)$  converge.

1. Calculer  $\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i}$  de deux façons différentes.

$\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i}$  est l'expression de l'espérance d'une loi binomiale de paramètres  $k$  et  $\alpha$  donc, d'après le cours, on peut affirmer que :

$$\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i} = \alpha k.$$

On peut aussi le démontrer ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i} &= 0 + \sum_{i=1}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i} \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha^i (1-\alpha)^{k-i} k \binom{k-1}{i-1} \text{ d'après la formule du pion} \\ &= k \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{i+1} (1-\alpha)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} \\ &= k\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \alpha^i (1-\alpha)^{k-1-i} \binom{k-1}{i} \\ &= k\alpha (\alpha + (1-\alpha))^{k-1} \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= k\alpha 1^{k-1} \\ &= k\alpha. \end{aligned}$$

2. Dans un premier temps, les cellules pathogènes évoluent sans désinfectant. On note  $\alpha$  la probabilité pour une cellule de se diviser à un intervalle de temps quelconque  $\delta t$  et on suppose que les cellules n'interagissent pas.

(a) Expliciter  $P_{(U_n=k)}(X_n = i)$  pour tout entier naturel  $i$ .

On suppose que  $(U_n = k)$  a lieu. Soit  $i$  un entier naturel. Si  $i > k$  alors, comme il ne peut pas y avoir, à un moment donné, strictement plus de cellules qui se divisent que de cellules tout court, on a :  $P_{(U_n=k)}(X_n = i) = 0$ . Supposons  $i \leq k$ . On a alors  $k$  cellules qui se comportent de manière indépendante et qui ont toutes la même probabilité de se diviser (qui est  $\alpha$ ). Si on appelle succès le fait de se diviser,  $X_n$  compte alors le nombre de succès. Avec nos connaissances sur la loi binomiale, on peut donc dire que  $P_{(U_n=k)}(X_n = i) = \binom{k}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{k-i}$ .

Bilan : Pour tout entier naturel $i$ , on a : $P_{(U_n=k)}(X_n = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$
---

(b) En déduire que  $\sum_{i=0}^{+\infty} iP_{(U_n=k)}([X_n = i]) = \alpha k$ .

On vient de voir que, pour tout entier naturel  $i$ , on a :

$$P_{(U_n=k)}(X_n = i) = \begin{cases} \binom{k}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

$\sum_{i=0}^{+\infty} iP_{(U_n=k)}(X_n = i)$  est alors une somme finie et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{+\infty} iP_{(U_n=k)}(X_n = i) &= \sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1 - \alpha)^{k-i} \\ &= \alpha k \text{ d'après la question 1.} \end{aligned}$$

(c) En déduire que  $E(X_n) = \alpha E(U_n)$ .

On a admis l'existence de l'espérance de  $U_n$ . La famille d'événements  $(U_n = k)_{k \in \mathbb{N}}$  constitue un système complet d'événements. Pour tout entier naturel  $i$ , on a alors, d'après la formule des probabilités totales, l'égalité suivante :

$$P(X_n = i) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(U_n=k)}(X_n = i) P(U_n = k)$$

Sous réserve d'existence, comme  $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ , cela donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{i=0}^{+\infty} iP(X_n = i) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} i \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(U_n=k)}(X_n = i) P(U_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} iP_{(U_n=k)}(X_n = i) P(U_n = k) \text{ (échange des symboles } \sum \text{ justifiés ultérieurement)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(U_n = k) \left( \sum_{i=0}^{+\infty} iP_{(U_n=k)}(X_n = i) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(U_n = k) k \alpha \text{ d'après la question précédente} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} P(U_n = k) k \\ &= \alpha E(U_n) \text{ car } U_n(\Omega) \subset \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } E(X_n) = \alpha E(U_n).$$

On note que l'échange des symboles  $\sum$  a pu s'effectuer car :

- Pour tout entier naturel  $k$ ,  $\sum_i i P_{(U_n=k)}(X_n = i) P(U_n = k)$  converge d'après la question précédente (vers  $\alpha k P(U_n = k)$ ).
- La série de terme général  $\sum_{i=0}^{+\infty} i P_{(U_n=k)}(X_n = i) P(U_n = k)$  converge (et vaut  $\alpha E(U_n)$ ).
- Les séries intervenantes sont à termes positifs.

(d) Exprimer  $E(U_{n+1})$  en fonction de  $E(U_n)$ , puis montrer que  $E(U_n) = (1 + \alpha)^n N$ , où  $N$  est le nombre initial de cellules.

Comme le produit phytosanitaire n'a pas encore été pulvérisé, à l'instant  $(n + 1)\delta t$ , nous trouvons les cellules présentes à l'instant  $n\delta t$  qui n'ont pas été divisées entre  $n\delta t$  et  $(n + 1)\delta t$  (on a  $U_n - X_n$ ) auxquelles on rajoute les nouvelles cellules obtenues par division entre  $n\delta t$  et  $(n + 1)\delta t$  ( $X_n$  cellules sont concernées, elles deviennent  $2X_n$  cellules à l'instant  $(n + 1)\delta t$ ), on a donc :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= (U_n - X_n) + 2X_n \\ &= U_n + X_n \end{aligned}$$

On a donc :  $U_{n+1} = U_n + X_n$ . La linéarité de l'espérance (on suppose toujours l'existence de  $E(U_n)$ ) donne alors :

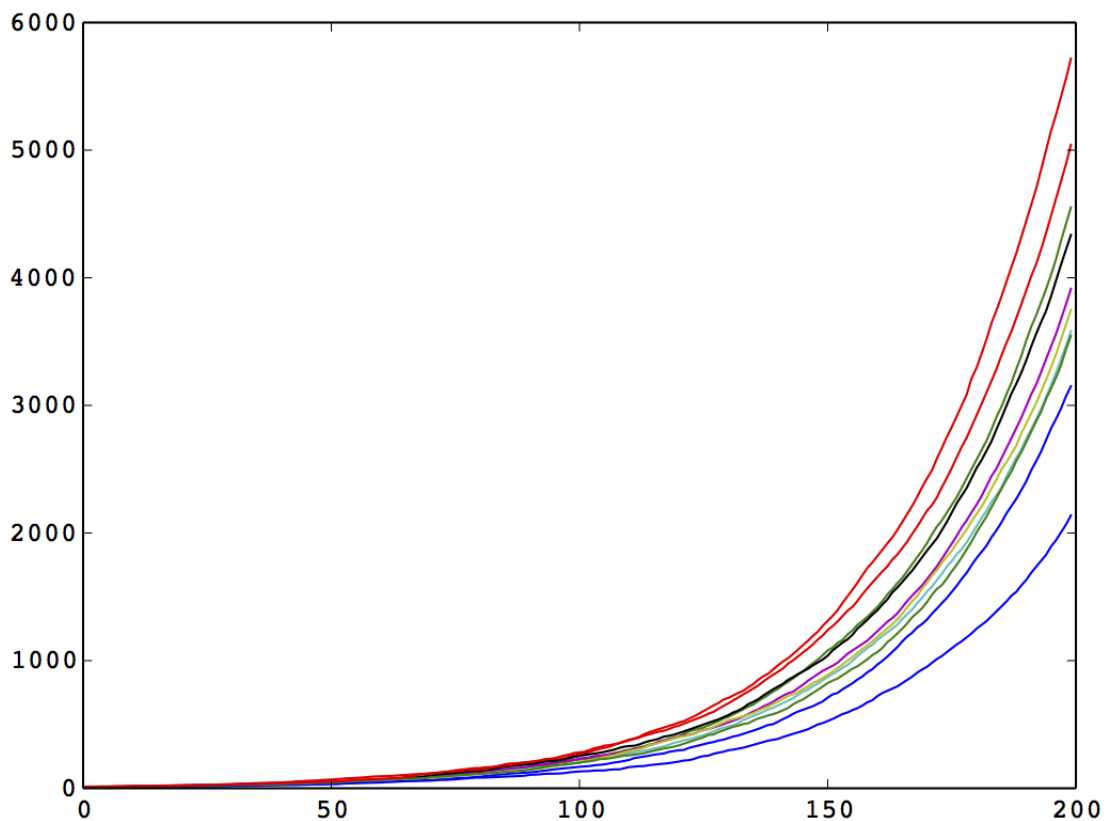
$$\begin{aligned} E(U_{n+1}) &= E(U_n) + E(X_n) \\ &= E(U_n) + \alpha E(U_n) \text{ d'après la question précédente} \\ &= (1 + \alpha)E(U_n) \end{aligned}$$

La suite  $(E(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de premier terme  $E(U_0)$  et de raison  $(1 + \alpha)$ . Si  $N$  est le nombre (non aléatoire) initial de cellules, nous avons donc  $U_0 = N$  et donc  $E(U_0) = N$  et par conséquent (terme général d'une suite géométrique) :

$$E(U_n) = (1 + \alpha)^n N.$$

$$\boxed{\text{On a : } E(U_{n+1}) = (1 + \alpha)E(U_n) \text{ et } E(U_n) = (1 + \alpha)^n N.$$

(e) Lors d'une expérience, on observe l'évolution du nombre de bactéries dans dix boîtes de Pétri, chacune contenant au départ 10 cellules pathogènes. Les résultats de cette expérience sont représentés sur le graphique suivant :



Évaluer à l'aide de ces courbes la valeur du coefficient  $\alpha$ .

On peut considérer que  $n = 200$  dans ce graphique. On peut alors effectuer la moyenne des valeurs de  $U_{200}$  obtenues au cours de ces expériences. Visuellement, cette moyenne est égale à 4000. D'après la question précédente,  $E(U_n) = (1 + \alpha)^n N$ . Cela donne alors :

$$4000 = (1 + \alpha)^{200} \times 10$$

puis  $\ln(1 + \alpha) = \frac{1}{200} \ln(400)$  et donc :

$$\alpha = 400^a - 1 \text{ avec } a = \frac{1}{200}, \text{ soit : } \alpha \approx 0,03.$$

3. On introduit l'agent désinfectant de sorte que, à chaque instant, chaque cellule pathogène peut-être neutralisée avec la probabilité  $\beta$ , et sinon elle peut se diviser avec la probabilité  $\alpha$  précédente.

(a) Exprimer  $E(U_{n+1})$  en fonction de  $E(U_n)$ , puis  $E(U_n)$  en fonction de  $n$ .

- On suppose que  $(U_n = k)$  a lieu. On a alors  $k$  cellules qui se comportent de manière indépendante et qui ont toutes la même probabilité de se diviser (qui est  $\alpha(1 - \beta)$  car, d'après l'énoncé, il faut d'abord qu'elle ne soit pas neutralisée puis qu'elle se divise). En raisonnant comme dans la première question, on démontre alors que la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $(U_n = k)$  est une loi binomiale de paramètres  $k$  et  $\alpha(1 - \beta)$  puis :

$$E(X_n) = \alpha(1 - \beta)E(U_n).$$

- De même, comme chaque cellule a la même probabilité  $\beta$  d'être neutralisée, on en déduit que la loi de  $Y_n$  conditionnée par l'événement  $(U_n = k)$  est binomiale de paramètres  $k$  et  $\beta$  puis que :

$$E(Y_n) = \beta E(U_n).$$

- Il y avait  $U_n$  cellules à l'instant  $n\delta t$ . Entre  $n\delta t$  et  $(n + 1)\delta t$ , on a trois catégories de cellules :
  - $X_n$  cellules vont se diviser et devenir  $2X_n$  cellules à l'instant  $(n + 1)\delta t$ .

- $Y_n$  cellules vont être neutralisées et devenir 0 cellules à l'instant  $(n + 1)\delta t$ .
  - Le reste,  $U_n - Y_n - X_n$ , ne va rien faire de particulier et rester  $U_n - Y_n - X_n$  cellules à l'instant  $(n + 1)\delta t$ .
- On en déduit :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= (U_n - X_n - Y_n) + 2X_n + 0Y_n \\ &= U_n + X_n - Y_n \end{aligned}$$

puis, par linéarité de l'espérance et en utilisant les premiers résultats de cette question, on obtient alors :

$$\begin{aligned} E(U_{n+1}) &= E(U_n) + E(X_n) - E(Y_n) \\ &= E(U_n) + \alpha(1 - \beta)E(U_n) - \beta E(U_n) \\ &= (1 + \alpha - \beta - \alpha\beta)E(U_n) \end{aligned}$$

Nous avons de nouveau une suite géométrique, cette fois de premier terme  $N$  et de raison  $(1 + \alpha - \beta - \alpha\beta)$ . Comme en 1)c), on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(U_n) = (1 + \alpha - \beta - \alpha\beta)^n N.$$

- (b) Déterminer une condition sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que l'infection soit enrayée.

L'infection sera enrayée si le nombre moyen de cellules tend vers 0, donc si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(U_n)) = 0$ . Comme il s'agit d'une suite géométrique de premier terme non nul, il faut et il suffit que sa raison en valeur absolue soit strictement plus petite que un :

$$\text{L'infection est enrayée si et seulement si } |1 + \alpha - \beta - \alpha\beta| < 1.$$

4. Simuler informatiquement l'évolution d'une population de cellules pathogènes comptant initialement  $N$  cellules lorsqu'on pulvérise l'agent infectant.

On choisira des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  permettant de décrire les différents cas de figure possibles.

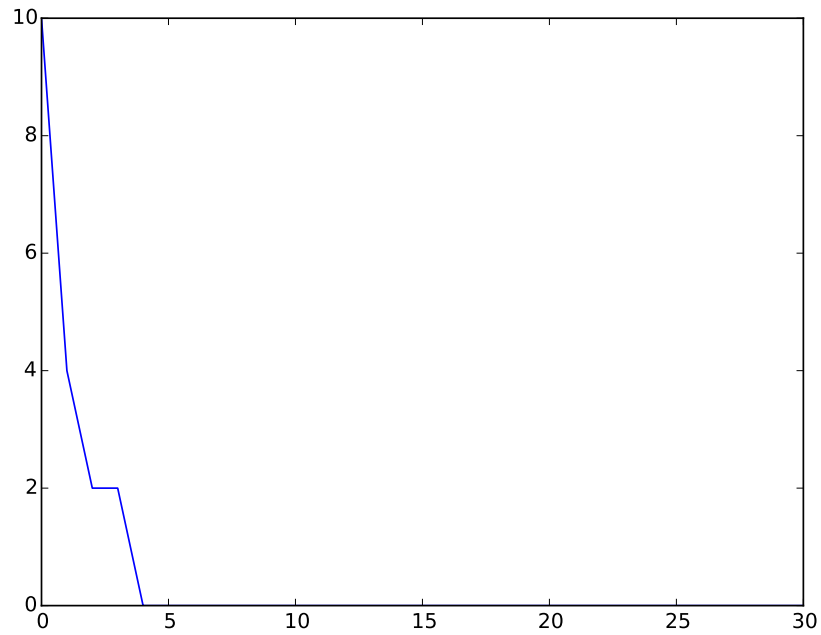
On propose la simulation informatique suivante :

```

1 from random import random
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 def simu(alpha,beta, N=10,n=30):
6     U=[N]
7     Un=N #Etat initial
8     for k in range(n): #les generations successives
9
10         for i in range(Un): # On commence par tuer les bacteries
11             if (random() < beta):
12                 Un=Un-1
13
14         for i in range(Un): # On passe aux divisions de cellules
15             if (random() < alpha):
16                 Un+=1
17
18     U.append(Un)
19     X=np.arange(n+1)
20     plt.plot(X,U)
21     return U

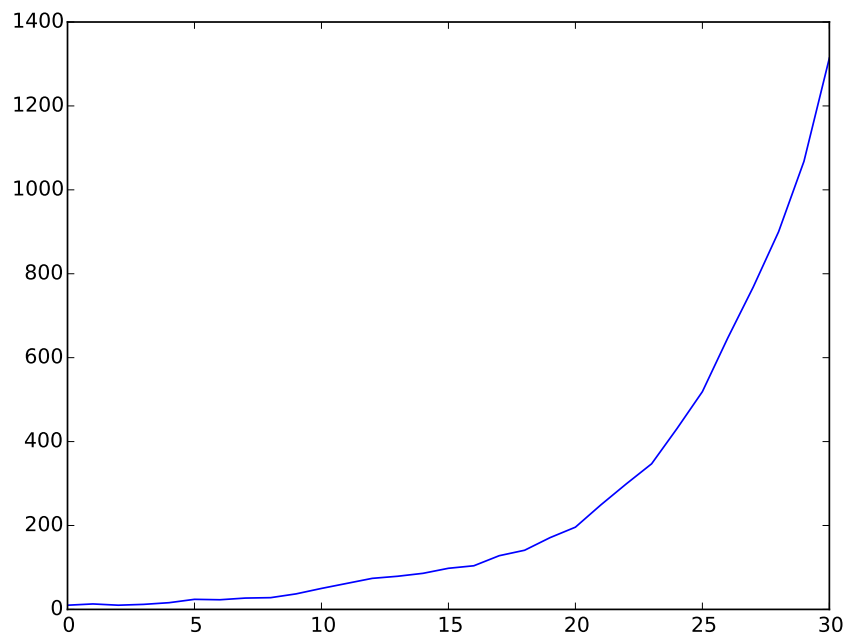
```

- Pour  $\alpha = 0,5$  et  $\beta = 0,5$ , on a obtenu :



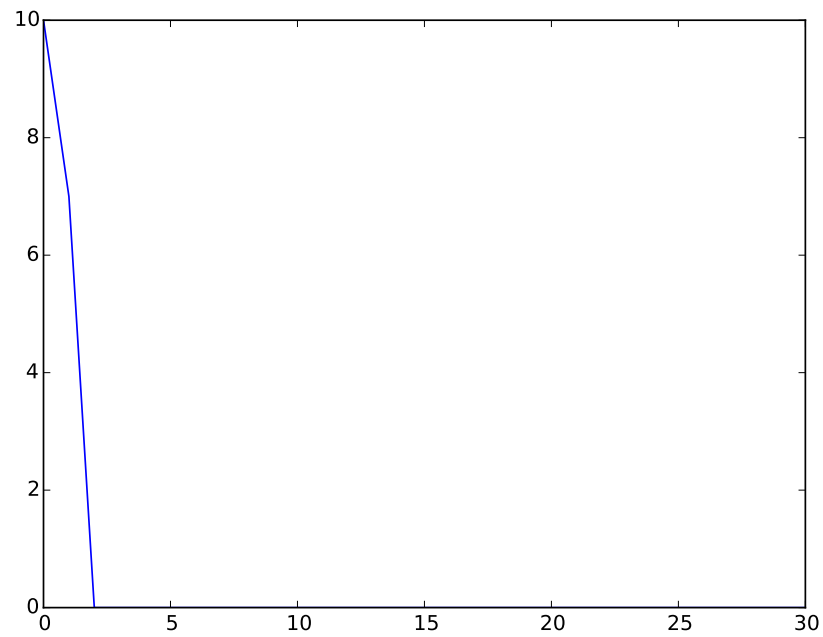
C'est cohérent (infection enrayée) avec la question précédente car  $1 + \alpha - \beta - \alpha\beta$  vaut alors 0,75 donc on a bien  $|1 + \alpha - \beta - \alpha\beta| < 1$ .

- Pour  $\alpha = 0,3$  et  $\beta = 0,7$ , on a obtenu :



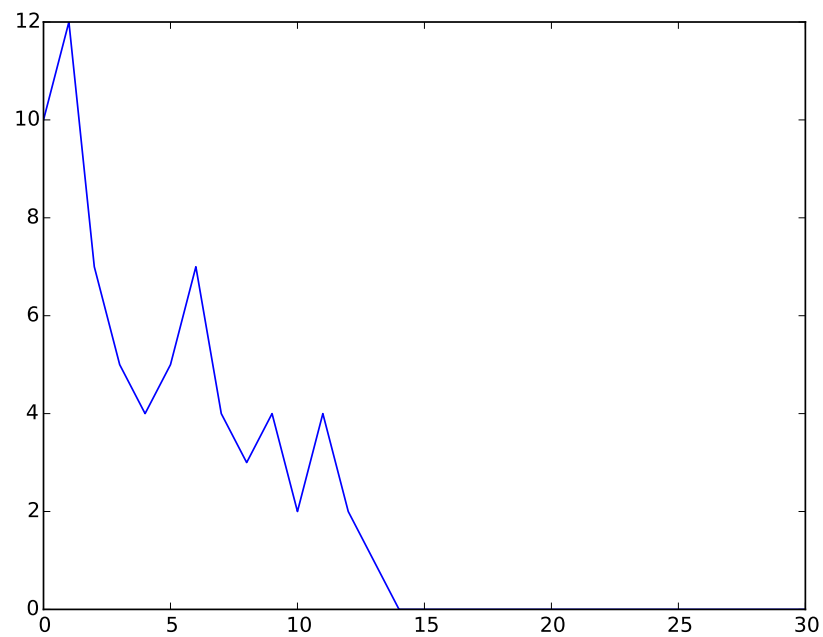
C'est cohérent (infection enrayée) avec la question précédente car  $1 + \alpha - \beta - \alpha\beta$  vaut alors 0,39, on a donc bien  $|1 + \alpha - \beta - \alpha\beta| < 1$ .

- Pour  $\alpha = 0,7$  et  $\beta = 0,3$ , on a obtenu :



C'est cohérent (infection non enrayée) avec la question précédente car  $1 + \alpha - \beta - \alpha\beta$  vaut alors 1,19, on a donc bien  $|1 + \alpha - \beta - \alpha\beta| \geq 1$ .

- Pour  $\alpha = 0,6$  et  $\beta = 0,4$ , on a obtenu :



C'est cohérent (infection non enrayée mais de peu) avec la question précédente car  $1 + \alpha - \beta - \alpha\beta$  vaut alors 1,04, on a donc bien  $|1 + \alpha - \beta - \alpha\beta| \geq 1$  (mais de peu... cela va moins vite que le cas précédent).

**Question de cours :** Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$  et en 0 à l'ordre 5 de  $x \mapsto \ln(1+x)$ .

D'après le cours,  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o_0(x^4)$ . En primitivant, on obtient :  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o_0(x^5)$ .

### Exercice.

Pour tout entier naturel  $n$ , pour tout réel  $x$ , on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n} dt; J_n(x) = \int_0^x \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt; J(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1. Soit  $x$  un réel. Déterminer  $J(x)$ .

On a :  $J(x) = \arctan(x) - \arctan(0)$ . De  $\arctan(0) = 0$ , on déduit :

$$J(x) \text{ est } \arctan(x).$$

2. Soient  $k$  un entier naturel et  $x$  un réel. Calculer  $I_k(x)$ .

Sans difficulté, on obtient :

$$I_k(x) = \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $J_n(x)$  est bien définie puis que :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Soit  $n$  un entier naturel. Par quotient (pour tout réel  $t$ ,  $1+t^2 > 0$  donc  $1+t^2 \neq 0$ ), la fonction  $t \mapsto \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  $J_n(x)$  est donc bien définie. D'autre part, pour tout réel  $t$ ,  $-t^2 \neq 1$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} &= \sum_{k=0}^n (-t^2)^k \\ &= (-t^2)^0 \times \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} \quad (\text{somme géométrique et } -t^2 \neq 1) \\ &= \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \end{aligned}$$

Par intégration, on en déduit :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \int_0^x \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^n \left( (-1)^k \int_0^x t^{2k} dt \right) \quad \text{par linéarité de l'intégration} \\ &= \sum_{k=0}^n ((-1)^k I_k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

$$J_n(x) \text{ est bien défini et vaut } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

4. Écrire une fonction en Python nommée  $J_n$  qui prend en argument un réel  $x$  et un entier naturel  $n$  et retourne la valeur de  $J_n(x)$ .

Voici une fonction Python nommée  $J_n$  prenant en argument un réel  $x$  de  $[-1; 1]$  et un entier naturel  $n$  et retournant la valeur de  $J_n(x)$ , qui est  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$  d'après la question précédente :

```

1 def Jn(x, n):
2     s=0
3     e=1
4     for k in range(1, 2*n+2, 2): #seuls les termes impairs interviennent
5         s+=e*x**(k)/k
6         e=-e # mod lise l'alternance de signe dans le d.se.
7     return s

```

5. Soit  $x \in [-1; 1]$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$|J(x) - J_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

Soient  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel de  $[-1, 1]$ .  $J(x) - J_n(x)$ , est, par linéarité de l'intégration,  $\int_0^x \left( \frac{1}{1+t^2} - \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \right) dt$ ,

soit  $\int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ . Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
 |J(x) - J_n(x)| &\leq \int_0^{|x|} \left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \right| dt \\
 &\leq \int_0^{|x|} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \text{ par positivité de } t \mapsto \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \text{ sur } [0, |x|] \\
 &\leq \int_0^{|x|} t^{2n+2} dt \text{ car } \textcircled{1} \\
 &\leq \int_0^1 t^{2n+2} dt \text{ car } \textcircled{2} \\
 &\leq \frac{1}{2n+3}
 \end{aligned}$$

- $\textcircled{1}$  : Pour ce passage là, il faut dire que  $1+t^2 \geq 1$  et  $t^{2n+2} \geq 0$  pour tout réel  $t$  donc  $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$  sur  $[0, |x|]$  et on conclut en invoquant, avec justifications, la croissance de l'intégration.
- $\textcircled{2}$  : Pour ce passage là, il faut dire que  $t \mapsto t^{2n+2}$  est positive donc, en invoquant, avec justifications, la positivité de l'intégration,  $\int_{|x|}^1 t^{2n+2} dt \geq 0$  d'où le résultat par la relation de Chasles.

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in [-1; 1]; |J(x) - J_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

6. Soit  $x \in [-1; 1]$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n(x))$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2n+3} \right) = 0$ , d'après le théorème des Gendarmes et la question précédente, on peut affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n(x)) \text{ existe et vaut } J(x), \text{ soit } \arctan(x).$$

7. A l'aide de Python, proposer une fonction nommée  $J$  qui prend comme argument un réel  $x \in [-1; 1]$  et retourne la valeur de  $J(x)$  à  $10^{-4}$  près, sans utiliser de fonction atan prédéfinie dans une bibliothèque.

Soit  $x$  un élément de  $[-1; 1]$ . Comme  $10^{-4} > 0$  et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n(x)) = \arctan(x)$ , on peut alors affirmer qu'il existe  $n_0$  un entier naturel tel que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur à  $n_0$ , on a :

$$|J_n(x) - \arctan(x)| \leq 10^{-4}.$$

Soit  $n$  un entier naturel. Si  $\frac{1}{2n+3} \leq 10^{-4}$ , soit, si  $n \geq \frac{10^4 - 3}{2}$ , on peut affirmer que  $|J_n(x) - \arctan(x)| \leq 10^{-4}$  car on a vu que  $|J_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$ .

On en déduit le programme suivant qui prend comme argument un réel  $x \in [-1; 1]$  et retourne la valeur de  $J(x)$  à  $10^{-4}$  près sans utiliser la fonction `atan` :

```
1 def approxatan(x):
2     n=int((10001-3)/2)
3     return Jn(x,n)
```

8. Le résultat de la question 6 reste-t-il vrai lorsque  $x \notin [-1; 1]$ ?

Soit  $x$  un réel tel que  $x \notin [-1; 1]$ . Par croissances comparées, on sait que  $\left(\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0 et

donc,  $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$  ne converge pas. On peut le tester sur nos programmes. `approxatan(2)` donne `OverflowError`. `Jn(2, 100)` donne `1.2765938744997007e+58`, `Jn(2, 1000)` donne `OverflowError`.

Ce résultat n'est pas vrai lorsque  $x \notin [-1; 1]$ .

9. Expliciter totalement  $J(x) + J\left(\frac{1}{x}\right)$  pour tout réel non nul  $x$ .

Soit  $x$  un réel non nul. Soit  $h : x \mapsto J(x) + J\left(\frac{1}{x}\right)$ . D'après la question 1, on a donc :

$$h : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$h$  est par somme dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et pour tout réel non nul  $x$ , on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+x^{-2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc  $h$  est constante sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $\mathbb{R}_+^*$  est un intervalle. On en déduit que  $h(x) = h(1)$  si  $x > 0$ , cela donne  $h(x) = 2\arctan(1)$ , soit  $h(x) = \frac{\pi}{2}$ . Si  $x < 0$ , par imparité,  $h(x) = -\frac{\pi}{2}$ .

$$J(x) + J\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0, J(x) + J\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0.$$

10. En déduire  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ . Retrouver ce résultat autrement.

Pour tout réel strictement positif  $x$ , on a :

$$J(x) + J\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme  $J$  est croissante et bornée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (J(x))$  existe et est finie. En passant à la limite dans la relation précédente, par somme et composition, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (J(x) + J(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Comme  $J(0) = 0$ , cela donne  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (J(x)) = \frac{\pi}{2}$ . Ceci signifie par définition que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$  car, par continuité de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$  est une intégrale généralisée uniquement à cause de la borne  $+\infty$ . On peut retrouver ce

résultat en signalant que  $J = \arctan$  et en rappelant que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan(x)) = \frac{\pi}{2}$ .

On a prouvé de deux façons que  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$ .

**Question de cours :** Énoncer la loi faible des grands nombres.

La loi faible des grands nombres dit que, si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, admettant une même espérance  $m$  et une même variance alors :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \mathbb{P} \left( \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m \right| \geq \varepsilon \right) \right) = 0.$$

### Exercice.

Soient  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout  $n \geq 2$ , on note  $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ , et on note  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

1. (a) Soit  $U$  une variable aléatoire, de loi uniforme sur  $]0, 1]$ . Vérifier que la variable  $-\ln(U)$  suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Calculons la fonction de répartition de  $Z$  en posant  $Z = -\ln(U)$ . Soit donc  $t$  un réel. Si  $t < 0$ , il est clair que  $\mathbb{P}(Z \leq t) = 0$  car  $Z$  est presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  car  $U$  est presque sûrement à valeurs dans  $]0, 1]$ . Sinon, par stricte croissance de  $\exp$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \leq t) &= \mathbb{P}(-\ln(U) \leq t) \\ &= \mathbb{P}(U \geq e^{-t}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U < e^{-t}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U \leq e^{-t}) \text{ car } U \text{ est à densité} \\ &= 1 - e^{-t} \end{aligned}$$

car, comme  $U$  suit une loi uniforme sur  $]0, 1]$  et  $e^{-t} \in ]0, 1]$  car  $t \geq 0$ , on sait que  $F_U(e^{-t}) = e^{-t}$ . On reconnaît alors la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, et donc  $-\ln(U)$  suit bien cette loi.

- (b) En déduire une fonction Python qui prend un entier un entier  $n$  en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire  $Y_n$ .

De la question précédente, on déduit cette fonction Python qui prend un entier un entier  $n$  en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire  $Y_n$  :

```

1 import math as m
2 import random as rd
3
4 def y(n):
5     liste = [-m.log(rd.random()) for k in range(n)]
6     M=liste[0]
7     for k in liste:
8         if k>M:
9             M=k
10    return M
11
```

- (c) En admettant que la variable aléatoire  $Y_n$  admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n} \right)$ .

Afin de conjecturer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n} \right)$ , on propose le programme suivant où, comme d'habitude, on approxime  $\mathbb{E}(Y_n)$  par sa moyenne empirique en invoquant la loi faible des grands nombres :

```

1 def s(n):
2     f = 0
3     for k in range(1,n+1):
4         f += 1/k
5     return f
6
7 def conj(n):
8     N = 10000
9     moyenne = 0
10    for _ in range(N):
11        moyenne += y(n)/N
12    return moyenne/s(n)
13
14 print([conj(k) for k in range(1,10)])
15

```

On a obtenu :

```

1 [0.9918231151556832, 0.9957209870629514, 0.9990161822276336, 1.006579182656196,
2  0.9965841859246674, 1.0018147829163317, 0.9973071819291339, 1.0091867613131806,
3  1.003561702074296]

```

D'après les résultats obtenus, il semble que cette limite soit égale à 1.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe  $n$  un entier tel que  $n \geq 2$ .

2. On note  $F_n$  la fonction de répartition de  $Y_n$ .

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

En déduire que la variable  $Y_n$  est une variable à densité, et déterminer une densité  $f_n$  de  $Y_n$ .

Soit  $t$  un réel. On note que le maximum des  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  est inférieur à  $t$  si et seulement si tous les  $X_i$  sont inférieurs à  $t$ .

On a donc, pour  $x$  un réel positif :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(Y_n \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \text{ par indépendance} \\ &= (1 - e^{-x})^n \text{ d'après la loi des } X_i \end{aligned}$$

Les  $X_i$  étant presque sûrement à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , il est clair que  $F_n(x) = 0$  si  $x$  est un réel strictement négatif. On a donc :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}_-^* \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \in [0, +\infty[ \end{cases}$$

$F_n$  est donc bien une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  (continuité en 0 vraie car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1 - e^{-x})^n) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (0)$ ) et est de classe  $\mathcal{C}^1$  sauf éventuellement en un nombre fini de points (ici, on retire 0). On en déduit que  $Y_n$  est une variable à densité et, d'après le cours, une densité  $f_n$  de  $Y_n$  est :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ F_n'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{ce qui donne : } f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

3. (a) Montrer que, pour tout réel  $u$  de  $[0, 1]$ , on a :

$$(1 - u)^n \geq 1 - nu.$$

Soit  $u$  un élément de  $[0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit l'hypothèse  $\mathcal{H}(n)$  : " $(1 - u)^n \geq 1 - nu$ ".

- $\mathcal{H}(1)$  est triviale.
- Soit  $n$  un entier naturel non nul. Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (1 - u)^{n+1} &= (1 - u)(1 - u)^n \\ &\geq (1 - u)(1 - nu) \text{ par } \mathcal{H}(n) \text{ et car } 1 - u \geq 0 \\ &\geq 1 - (n + 1)u + nu^2 \\ &\geq 1 - (n + 1)u \end{aligned}$$

On a bien  $\mathcal{H}(n + 1)$ .

On a donc prouvé que  $\mathcal{H}(1)$  est vraie et, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $\mathcal{H}(n)$  implique  $\mathcal{H}(n + 1)$ .  $\mathcal{H}(n)$  est donc vraie pour tout entier naturel  $n$  d'après le principe de récurrence.

(b) En déduire que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$  est convergente et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 - F_n(x))) = 0$ .

La fonction  $1 - F_n$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$  est donc une intégrale généralisée uniquement à cause de la borne  $+\infty$ . Soit  $x$  un réel positif. Alors  $e^{-x} \in [0, 1]$ , et donc, d'après la question précédente, on peut affirmer que :

$$\begin{aligned} 1 - F_n(x) &\leq 1 - (1 - ne^{-x}) \\ &\leq ne^{-x}. \end{aligned}$$

Les fonctions  $1 - F_n$  et  $x \mapsto ne^{-x}$  étant positives, et cette dernière étant intégrable (à démontrer rapidement!),  $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$  converge d'après le théorème de comparaison. De plus, on a de la même façon pour tout  $x \geq 0$

$$0 \leq x(1 - F_n(x)) \leq nxe^{-x},$$

et, par le théorème des Gendarmes, comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (nxe^{-x}) = 0$  (par produit) et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (0) = 0$ , on peut affirmer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 - F_n(x))) = 0$ .

4. (a) Pour tout  $A > 0$ , montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A xf_n(x)dx = \int_0^A (1 - F_n(x))dx - A(1 - F_n(A)).$$

Soit  $A$  un réel strictement positif. Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $]0, A]$  par  $u : x \mapsto x$  et  $v : x \mapsto 1 - F_n(x)$ .  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, A]$ , et donc, par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A xf_n(x)dx &= - \int_0^A u(x)v'(x) dx \\ &= -[u(x)v(x)]_0^A + \int_0^A u'(x)v(x)dx \\ &= -A(1 - F_n(A)) + \int_0^A (1 - F_n(x))dx \end{aligned}$$

(b) En déduire que la variable  $Y_n$  admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx.$$

On a vu en 3b que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} (A(1 - F_n(A))) = 0 \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \int_0^A (1 - F_n(x))dx \right) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx.$$

Par somme, d'après la question précédente, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} xf_n(x)dx$  converge, et donc  $Y_n$  admet bien une espérance, qui, par somme, est celle demandée.

5. À l'aide du changement de variable  $t = 1 - e^{-x}$ , montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt,$$

et en déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n.$$

La fonction  $\varphi : t \mapsto -\ln(1-t)$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, 1[$  et strictement monotone, et donc par changement de variables sur intégrale généralisée, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \int_0^1 (1 - F_n(-\ln(1-t))) \frac{dt}{1-t} \\ &= \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t} dt. \end{aligned}$$

On reconnaît alors une somme géométrique, pour tout réel  $t$  différent de 1, on sait que  $\frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k$  ce qui donne par linéarité de l'intégration que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 t^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat que l'on avait conjecturé avec notre fonction Python.