

EXERCICE AVEC PRÉPARATION

Question de cours : Définition d'une base orthonormée dans \mathbb{R}^n avec $n \geq 1$.

Exercice : Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- Chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année.
- La probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0,25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de souris femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an, et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans. Notons pour tout entier naturel n , après n années, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles. n désignera dans tout ce problème un entier naturel.

- Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :
$$\begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n \\ a_{n+1} &= 0,25j_n \end{cases}$$
 - On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$. Expliciter alors une matrice L telle que, pour tout entier naturel n , on ait : $S_{n+1} = LS_n$.
- En déduire une expression de S_n en fonction de L , S_0 et n .
- Montrer que L est diagonalisable.
 - Déterminer $(U_1; U_2)$ une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de L .
 - Soient λ et μ les coordonnées de S_0 dans la base $(U_1; U_2)$. Exprimer S_n en fonction de λ , μ et n .
- On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.
 - Écrire un programme informatique qui permet de retourner les listes $[j_0; j_1; \dots; j_{10}]$ et $[a_0; a_1; \dots; a_{10}]$.
 - Exprimer j_n et a_n en fonction de n .
 - On désigne par t_n le nombre total de souris femelles après n années. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$.
 - Déterminer la limite de $\left(\frac{t_{n+1}}{t_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter ce résultat.
 - Vers quelle répartition jeunes/adultes semble tendre la population? Proposer un programme pour le vérifier.

EXERCICE AVEC PRÉPARATION

Question de cours : Quand dit-on qu'une fonction est une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle?

Exercice.

k et n désigneront des entiers naturels dans ce sujet. Un agent biologique pathogène se déplace et multiplie dans l'air par division de chaque cellule en deux cellules identiques. Les cellules sont initialement immortelles, puis neutralisées par un agent désinfectant pulvérisé pour combattre l'infection. On discrétise le temps en instants successifs séparés d'une durée δt , et on note pour tout entier naturel n :

- U_n le nombre de cellules pathogènes actives en suspension à l'instant $n\delta t$. On admet l'existence de $E(U_n)$.
- X_n et Y_n le nombre de cellules actives respectivement divisées / neutralisées entre $n\delta t$ et $(n+1)\delta t$.

On admet que $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f(i, k) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} f(i, k) \right)$ est vrai si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- f est une fonction définie sur \mathbb{N}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^+
- Pour tout entier naturel k , $\sum_{i=0}^{+\infty} f(i, k)$ converge
- La série de terme général $\sum_{i=0}^{+\infty} f(i, k)$ converge.

1. Calculer $\sum_{i=0}^k i \binom{k}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{k-i}$ de deux façons différentes.

2. Dans un premier temps, les cellules pathogènes évoluent sans désinfectant. On note α la probabilité pour une cellule de se diviser à un intervalle de temps quelconque δt et on suppose que les cellules n'interagissent pas.

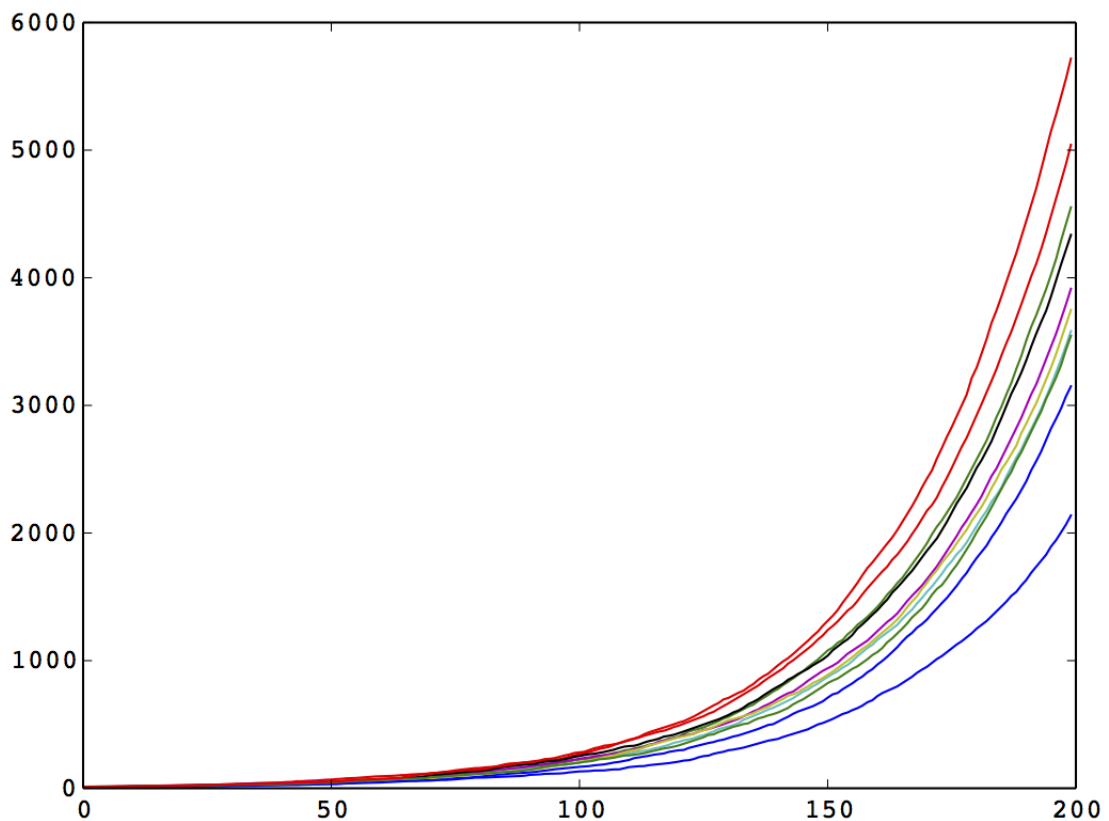
(a) Expliciter $P_{(U_n=k)}(X_n = i)$ pour tout entier naturel i .

(b) En déduire que $\sum_{i=0}^{+\infty} iP_{[U_n=k]}([X_n = i]) = \alpha k$.

(c) En déduire que $E(X_n) = \alpha E(U_n)$.

(d) Exprimer $E(U_{n+1})$ en fonction de $E(U_n)$, puis montrer que $E(U_n) = (1 + \alpha)^n N$, où N est le nombre initial de cellules.

(e) Lors d'une expérience, on observe l'évolution du nombre de bactéries dans dix boîtes de Pétri, chacune contenant au départ 10 cellules pathogènes. Les résultats de cette expérience sont représentés sur le graphique suivant :



Évaluer à l'aide de ces courbes la valeur du coefficient α .

3. On introduit l'agent désinfectant de sorte que, à chaque instant, chaque cellule pathogène peut-être neutralisée avec la probabilité β , et sinon elle peut se diviser avec la probabilité α précédente.
 - (a) Exprimer $E(U_{n+1})$ en fonction de $E(U_n)$, puis $E(U_n)$ en fonction de n .
 - (b) Déterminer une condition sur α et β pour que l'infection soit enrayée.
4. Simuler informatiquement l'évolution d'une population de cellules pathogènes comptant initialement N cellules lorsqu'on pulvérise l'agent infectant.
On choisira des valeurs de α et β permettant de décrire les différents cas de figure possibles.

EXERCICE AVEC PRÉPARATION

Question de cours : Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et en 0 à l'ordre 5 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

Exercice.

Pour tout entier naturel n , pour tout réel x , on note :

$$I_n(x) = \int_0^x t^{2n} dt; J_n(x) = \int_0^x \frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} dt; J(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt.$$

1. Soit x un réel. Déterminer $J(x)$.
2. Soient k un entier naturel et x un réel. Calculer $I_k(x)$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $J_n(x)$ est bien définie puis que :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

4. Écrire une fonction en Python nommée J_n qui prend en argument un réel x et un entier naturel n et retourne la valeur de $J_n(x)$.
5. Soit $x \in [-1; 1]$. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$|J(x) - J_n(x)| \leq \frac{1}{2n+3}.$$

6. Soit $x \in [-1; 1]$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n(x))$.
7. A l'aide de Python, proposer une fonction nommée J qui prend comme argument un réel $x \in [-1; 1]$ et retourne la valeur de $J(x)$ à 10^{-4} près, sans utiliser de fonction `atan` prédéfinie dans une bibliothèque.
8. Le résultat de la question 6 reste-t-il vrai lorsque $x \notin [-1; 1]$?
9. Expliciter totalement $J(x) + J\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel non nul x .
10. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$. Retrouver ce résultat autrement.

EXERCICE AVEC PRÉPARATION

Question de cours : Énoncer la loi faible des grands nombres.

Exercice.

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, et on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- (a) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $]0, 1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
(b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n .
(c) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n} \right)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

- On note F_n la fonction de répartition de Y_n .
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n .

- (a) Montrer que, pour tout réel u de $[0, 1]$, on a :

$$(1 - u)^n \geq 1 - nu.$$

- (b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx$ est convergente et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 - F_n(x))) = 0$.

- (a) Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x) dx = \int_0^A (1 - F_n(x)) dx - A(1 - F_n(A)).$$

- (b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x)) dx.$$

- À l'aide du changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1 - t^n}{1 - t} dt,$$

et en déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n.$$