

# MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles finis. Que vaut  $\text{Card}(F \times G)$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{P}(F))$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{F}(F, G))$ ?

**Démonstration:** Variance de  $aX + b$  et preuve qu'une variable centrée réduite associée à une variable aléatoire est une variable centrée réduite.

### Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. Un groupe de  $2n$  personnes comprend  $n$  hommes et  $n$  femmes dont M Dupont et Mme Durand.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer dans une salle ayant  $2n$  chaises?
2. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde?
3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus M Dupont et Mme Durand soient à côté l'un de l'autre.

### Exercice 2

On dispose de trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne  $A$  contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne  $B$  contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne  $C$  contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience* : On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ?
2. *Deuxième expérience* : avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, on choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu  $n$  boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter.
  - (c) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'évènement : "La première boule noire a été tirée au  $k$ -ième tirage". Calculer  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (d) Déterminer la limite de  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 25

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Définir et expliciter  $A_n^p$  et  $\binom{n}{p}$ .

**Démonstration:** Démontrer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

#### Exercice 1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $n - X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Évaluer  $E(Y^2)$  de deux façons différentes.
3. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{1}{1 + X}$ .
4. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne). On note  $D$  l'événement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $R_i$  l'évènement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est  $i$ ".
  - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{R_i}(D)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
  - (c) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Compléter : Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $A$  et  $B$  deux événements, on a :

- $P(\bar{A}) = \dots$ ,
- Si  $A \subset B$ , on a :  $\dots$ ,
- $P(A \cup B) = \dots$ ,
- $P(B \setminus A) \dots$ .

**Démonstration:** Calcul de l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale.

**Exercice 1**

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué : le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

1. (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?  
(b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?  
(c) Plus généralement, s'il lance le dé  $n$  fois (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), quelle est la probabilité qu'il obtienne  $n$  fois le chiffre 6?
2. Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
  - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
  - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué?

**Exercice 2**

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Déterminer  $T(\Omega)$ .
2. Calculer  $P(T = 2)$ .
3. Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{(T > k-1)}(T > k)$ .
4. En déduire la loi de  $T$ .

# MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles finis. Que vaut  $\text{Card}(F \times G)$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{P}(F))$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{F}(F, G))$ ?

**Démonstration:** Variance de  $aX + b$  et preuve qu'une variable centrée réduite associée à une variable aléatoire est une variable centrée réduite.

### Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. Un groupe de  $2n$  personnes comprend  $n$  hommes et  $n$  femmes dont M Dupont et Mme Durand.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer dans une salle ayant  $2n$  chaises ?
2. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives ? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme ?
4. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus M Dupont et Mme Durand soient à côté l'un de l'autre.

### Exercice 2

On dispose de trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne  $A$  contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne  $B$  contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne  $C$  contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience* : On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ?
2. *Deuxième expérience* : avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, on choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu  $n$  boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter.
  - (c) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'évènement : "La première boule noire a été tirée au  $k$ -ième tirage". Calculer  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (d) Déterminer la limite de  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter le résultat obtenu.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 25

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Définir et expliciter  $A_n^p$  et  $\binom{n}{p}$ .

**Démonstration:** Démontrer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

#### Exercice 1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $n - X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Évaluer  $E(Y^2)$  de deux façons différentes.
3. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{1}{1 + X}$ .
4. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne). On note  $D$  l'événement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $R_i$  l'évènement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est  $i$ ".
  - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{R_i}(D)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
  - (c) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Compléter : Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $A$  et  $B$  deux événements, on a :

- $P(\bar{A}) = \dots$ ,
- Si  $A \subset B$ , on a :  $\dots$ ,
- $P(A \cup B) = \dots$ ,
- $P(B \setminus A) \dots$ .

**Démonstration:** Calcul de l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale.

**Exercice 1**

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué : le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

1. (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?  
(b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?  
(c) Plus généralement, s'il lance le dé  $n$  fois (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), quelle est la probabilité qu'il obtienne  $n$  fois le chiffre 6?
2. Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
  - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
  - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué?

**Exercice 2**

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Déterminer  $T(\Omega)$ .
2. Calculer  $P(T = 2)$ .
3. Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{(T > k-1)}(T > k)$ .
4. En déduire la loi de  $T$ .

# MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 25

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles finis.

- Combien y-a-t-il d'applications de  $G$  vers  $F$ ?
- Combien y-a-t-il d'injections de  $G$  vers  $F$ ?

**Démonstration :** Variance de  $aX + b$  et preuve qu'une variable centrée réduite associée à une variable aléatoire est une variable centrée réduite.

### Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. Un groupe de  $2n$  personnes comprend  $n$  hommes et  $n$  femmes dont M Dupont et Mme Durand.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer dans une salle ayant  $2n$  chaises ?
2. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives ? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme ?
4. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus M Dupont et Mme Durand soient à côté l'un de l'autre.

### Exercice 2

On dispose de trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne  $A$  contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne  $B$  contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne  $C$  contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience :* On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ?
2. *Deuxième expérience :* avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, on choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu  $n$  boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter.
  - (c) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'évènement : "La première boule noire a été tirée au  $k$ -ième tirage". Calculer  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (d) Déterminer la limite de  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter le résultat obtenu.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 25

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  un espace probabilisable fini. Dire ce qu'est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  et en donner une.

**Démonstration :** Démontrer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

#### Exercice 1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $n - X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Évaluer  $E(Y^2)$  de deux façons différentes.
3. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{1}{1 + X}$ .
4. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne). On note  $D$  l'évènement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $R_i$  l'évènement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est  $i$ ".
  - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{R_i}(D)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
  - (c) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer la formule des probabilités composées et celle de Bayes.

**Démonstration :** Calcul de l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale.

#### Exercice 1

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué : le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

- (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?  
(b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?  
(c) Plus généralement, s'il lance le dé  $n$  fois (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), quelle est la probabilité qu'il obtienne  $n$  fois le chiffre 6?
- Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
  - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
  - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué?

#### Exercice 2

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

- Déterminer  $T(\Omega)$ .
- Calculer  $P(T = 2)$ .
- Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{(T > k-1)}(T > k)$ .
- En déduire la loi de  $T$ .