

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Application linéaire et image d'une base : que peut-on dire ?

**Démonstration:** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective si et seulement si  $f$  est bijective.

**Exercice 1**

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases} \quad (c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xy + z \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (x, y) & \mapsto xX - y + x \end{cases} \quad (d) f_4 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.
3. Y-a-t-il des projecteurs/symétries dans cet exercice ?

**Exercice 2**

Soient  $D = \text{Vect}((1, 1, 2))$  et  $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de  $f$ , déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer une base de  $P$ .
3. Vérifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.
4. Montrer que  $f(D) \subset D$ .
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Énoncer le théorème du rang et donner quelques conséquences.

**Démonstration:** Matrice de  $f(x)$ .

### Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, z, y + x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice. Donner aussi une autre matrice associée à chaque fois.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

### Exercice 2

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel de dimension  $N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$ .
2. On suppose, uniquement dans cette question, que  $n$  est un entier naturel tel que  $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^n)$ .
3. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(\dim(\text{Ker}(f^n)))_{n \geq m}$  soit constante et prouver que, si  $n_0$  est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors  $n_0 \leq N$ .
4. En déduire que, si  $f$  est nilpotent, alors  $f^N = 0$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir application linéaire, isomorphisme, endomorphisme et forme linéaire.

**Démonstration:** Matrice et isomorphisme.

### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes!

1. On note  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_2$  la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante :  
 $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

(a) Expliciter les endomorphismes  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^3$  définies par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) = B, \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f_2) = B \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f_3) = B \text{ avec : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliciter noyau et image de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

2. Soit  $F = \text{Vect}(1 - X, X - X^2)$ . Donner des équations cartésiennes de  $F$  (on proposera deux méthodes).

### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :

$$p + q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

(a) Montrer qu'il existe un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .

(b) Donner la matrice de  $f$  dans cette base.

(c) Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est un automorphisme et évaluer  $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ .

# MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

**Définition/ Explication:** Application linéaire et image d'une base : que peut-on dire ?

**Démonstration:** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective si et seulement si  $f$  est bijective.

## Exercice 1

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xy + z \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (x, y) & \mapsto xX - y + x \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.
3. Y-a-t-il des projecteurs/symétries dans cet exercice ?

## Exercice 2

Soient  $D = \text{Vect}((1, 1, 2))$  et  $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de  $f$ , déterminer son noyau et son image.
2. Déterminer une base de  $P$ .
3. Vérifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.
4. Montrer que  $f(D) \subset D$ .
5. En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Énoncer le théorème du rang et donner quelques conséquences.

**Démonstration:** Matrice de  $f(x)$ .

### Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, z, y + x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice. Donner aussi une autre matrice associée à chaque fois.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

### Exercice 2

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel de dimension  $N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$ .
2. On suppose, uniquement dans cette question, que  $n$  est un entier naturel tel que  $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^n)$ .
3. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(\dim(\text{Ker}(f^n)))_{n \geq m}$  soit constante et prouver que, si  $n_0$  est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors  $n_0 \leq N$ .
4. En déduire que, si  $f$  est nilpotent, alors  $f^N = 0$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir application linéaire, isomorphisme, endomorphisme et forme linéaire.

**Démonstration:** Matrice et isomorphisme.

### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes!

1. On note  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_2$  la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante :  
 $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

(a) Expliciter les endomorphismes  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^3$  définies par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) = B, \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f_2) = B \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f_3) = B \text{ avec : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliciter noyau et image de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

2. Soit  $F = \text{Vect}(1 - X, X - X^2)$ . Donner des équations cartésiennes de  $F$  (on proposera deux méthodes).

### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :

$$p + q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

(a) Montrer qu'il existe un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .

(b) Donner la matrice de  $f$  dans cette base.

(c) Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est un automorphisme et évaluer  $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ .

# MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E_n, E_p)$  avec  $E_n$  espace de dimension  $n$  et  $E_p$  espace de dimension  $p$ . Que peut-on dire si  $u$  injective? surjective? bijective?

**Démonstration :** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective si et seulement si  $f$  est bijective.

### Exercice 1

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases} & \text{(c) } f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xy + z \end{cases} \\ \text{(b) } f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (x, y) & \mapsto xX - y + x \end{cases} & \text{(d) } f_4 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases} \end{array}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.

3. Y-a-t-il des projecteurs/symétries dans cet exercice?

### Exercice 2

Soient  $D = \text{Vect}((1, 1, 2))$  et  $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de  $f$ , déterminer son noyau et son image.

2. Déterminer une base de  $P$ .

3. Vérifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.

4. Montrer que  $f(D) \subset D$ .

5. En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

**Définition et QC**

**Définition/ Explication :** Définir formes linéaires et hyperplans.

**Démonstration :** Matrice de  $f(x)$ .

**Exercice 1**

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, z, y + x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice. Donner aussi une autre matrice associée à chaque fois.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

**Exercice 2**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel de dimension  $N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$ .
2. On suppose, uniquement dans cette question, que  $n$  est un entier naturel tel que  $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^n)$ .
3. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(\dim(\text{Ker}(f^n)))_{n \geq m}$  soit constante et prouver que, si  $n_0$  est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors  $n_0 \leq N$ .
4. En déduire que, si  $f$  est nilpotent, alors  $f^N = 0$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication :** Définir application linéaire, isomorphisme, automorphisme et forme linéaire.

**Démonstration :** Matrice et isomorphisme.

**Exercice 1**

Les deux questions sont indépendantes!

1. On note  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_2$  la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante :  
 $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

(a) Expliciter les endomorphismes  $f_1, f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^3$  définies par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) = B, \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f_2) = B \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f_3) = B \text{ avec : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliciter noyau et image de  $f_1, f_2$  et  $f_3$ .

2. Soit  $F = \text{Vect}(1 - X, X - X^2)$ . Donner des équations cartésiennes de  $F$  (on proposera deux méthodes).

**Exercice 2**

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :

$$p + q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

(a) Montrer qu'il existe un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .

(b) Donner la matrice de  $f$  dans cette base.

(c) Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est un automorphisme et évaluer  $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ .