

## Limites de fonctions

### Quelques calculs généraux pour commencer

#### Calcul 1.1



Soit  $x \in \mathbb{R}^*$ . Simplifier les expressions suivantes.

a)  $\frac{x^3 + x^2}{x}$  .....

c)  $\frac{x^3 + x^2 + x^4}{x^2}$  .....

b)  $x^3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$  .....

#### Calcul 1.2



Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Simplifier les expressions suivantes.

a)  $e^{2x} \times e^{-x}$  .....

c)  $\frac{e^{2x+1}}{e^{-x}}$  .....

b)  $\frac{e^{3x}}{e^x}$  .....

d)  $e^{x^2+x+1} \times e^{-x^2+3x}$  .....

### Fractions, polynômes et racines

#### Calcul 1.3 — Détection de forme indéterminée (I).



Pour chaque expression suivante, dire s'il s'agit d'une forme indéterminée, auquel cas on ne cherchera pas à calculer la limite et on écrira « FI » dans le cadre-réponse ; s'il ne s'agit pas d'une forme indéterminée, on donnera la limite en question.

a)  $e^x - x$ , en  $+\infty$  .....

c)  $\frac{\ln(x)}{x}$ , en  $+\infty$  .....

b)  $e^x - x$ , en  $-\infty$  .....

d)  $\frac{\ln(x)}{x}$ , en  $0^+$  .....

#### Calcul 1.4 — Détection de forme indéterminée (II).



Même exercice.

a)  $\frac{\cos(x)}{x}$ , en  $0^+$  .....

c)  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , en  $\frac{\pi}{2}^-$  .....

b)  $\frac{\sin(x)}{x}$ , en  $0^+$  .....

d)  $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , en  $\frac{\pi}{2}^+$  .....

**Calcul 3.5 — Autour de la constante « e » d'Euler.**



Simplifier les expressions suivantes.

- a)  $\ln(e^2)$  .....       c)  $\ln(\sqrt{e})$  .....   
b)  $\ln\left(\frac{1}{e^{11}}\right)$  .....       d)  $\ln(\sqrt{e^7})$  .....

**Calcul 3.6 — Logarithme et fonction exponentielle.**



Simplifier les expressions suivantes.

- a)  $e^{\ln(7)-\ln(5)}$  .....       b)  $e^{3\ln(10)}$  .....       c)  $e^{-\ln(\ln(3))}$  .....

**Calcul 3.7 — Simplifications remarquables.**



Simplifier les expressions suivantes.

- a)  $\ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1)$  .....   
b)  $\ln\left(\frac{1}{e^{-\ln(e^2)}}\right)$  .....   
c)  $\ln((\sqrt{2}-1)^{15}) + \ln((\sqrt{2}+1)^{15})$  .....   
d)  $\ln(140) + \ln\left(\frac{6}{7}\right) - \ln(24)$  .....

## Équations et inéquations

**Calcul 3.8 — Bien défini ?**



Indiquer pour quelles valeurs du nombre réel  $x$  les quantités suivantes sont bien définies.

- a)  $\ln(1+x)$  .....       b)  $\ln(x^2-3x)$  ..       c)  $\ln(\ln(x))$  .....

**Calcul 3.9**



Quel est le signe de chacune des quantités suivantes ?

- a)  $\ln(2)$  .....       c)  $\ln(0,8)$  .....       e)  $\ln(0,8^2)$  .....   
b)  $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$  .....       d)  $(\ln(0,8))^2$  .....       f)  $\ln(3) - 1$  .....

## Dérivée du logarithme

### Quelques calculs généraux pour commencer

#### Calcul 5.1



Soient  $x$  et  $t$  des réels. Simplifier les écritures suivantes.

a)  $e^{3x+1} \times e^{5x+2}$  .....

c)  $\frac{e^{2x+1} \times e^{5-8x}}{e^{2x+3}}$  .....

b)  $(e^{2t-4})^5 \times e$  .....

d)  $\frac{e^{2x+5t} \times e^{4x-3t}}{e^{2t+6x}}$  .....

#### Calcul 5.2



Écrire les nombres suivants sous la forme  $a \ln(b)$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers et  $b$  est le plus petit possible.

a)  $3 \ln(2) + \ln(4)$  .....

c)  $\ln(7 - 2\sqrt{6}) + \ln(7 + 2\sqrt{6})$  .....

b)  $\ln(100) - \ln(28) + \ln(21) - \ln(3)$  .....

d)  $4 \ln(9) - 2 \ln(27) + 6 \ln(\sqrt{3})$  .....

#### Remarque

Dans l'ensemble des calculs de cette fiche, on ne se souciera pas des domaines de définition et de dérivabilité.

### Dérivation du logarithme népérien

#### Calcul 5.3 — Au même dénominateur (I).



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  sous la forme d'un quotient pour  $f$  définie par :

a)  $f(x) = 2x + 1 - \ln(x)$  .....

b)  $f(x) = 4 \ln(x) - \frac{3}{x+1}$  .....

#### Calcul 5.4 — Au même dénominateur (II).



Déterminer l'expression de  $f'(x)$  sous la forme d'un quotient pour  $f$  définie par :

a)  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} - 3x^2$  .....

b)  $f(x) = e^x \times \ln(x)$  .....

# Autour des fonctions cosinus et sinus

## Calcul 6.13



Parmi les affirmations suivantes portant sur la fonction cosinus, laquelle est correcte ?

- (a) Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe  $(Oy)$ .
- (b) Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe  $(Ox)$ .
- (c) Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

.....

## Calcul 6.14 — Croissante ou décroissante ?



Pour chacune des questions suivantes, choisir la réponse correcte.

a)

- (a) La fonction sinus est croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- (b) La fonction sinus est décroissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

.....

b)

- (a) La fonction sinus est croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$
- (b) La fonction sinus est décroissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

.....

c)

- (a) La fonction  $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  est croissante sur  $[0, \pi]$
- (b) La fonction  $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  est croissante sur  $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

.....

## Calcul 6.15 — Paire ou impaire ?



Pour chacune des fonctions  $f$  suivantes, choisir la réponse correcte parmi ces trois propositions :

- (a)  $f$  est paire
- (b)  $f$  est impaire
- (c)  $f$  n'est ni paire ni impaire

a)  $f : x \mapsto \sin(2x)$  .....

c)  $f : x \mapsto 4 \cos(x) \sin(x)$  .....

b)  $x \mapsto 5 - 2 \cos(x)$  .....

d)  $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$  .....

## Dérivation des fonctions trigonométriques

### Quelques calculs généraux pour commencer

#### Calcul 7.1



Développer les expressions suivantes.

a)  $(x + y)(x^2 - xy + y^2) \dots$        b)  $\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \dots$

c)  $(x - 1)(x^2 - 1)(x^3 - 1) \dots$

#### Calcul 7.2



Factoriser les expressions suivantes.

a)  $7a^2b - 4ab^2 \dots$        b)  $a + 1 + b + ab \dots$

#### Calcul 7.3



Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes.

a)  $|x + 2| = 7 \dots$        b)  $|x + 2| = |x - 7| \dots$

### Calculs de dérivées

#### Calcul 7.4



Dans chacun des cas suivants, donner la réponse correcte.

a) Soit  $f : x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$ . Alors, on a  $f'(x) =$

- (a)  $2 \cos(x)$       (b)  $2 \sin(x)$       (c)  $\sin(x) - \cos(x)$       (d)  $\cos(x) - \sin(x)$

.....

b) Soit  $f : x \mapsto x \sin(x)$ . Alors, on a  $f'(x) =$

- (a)  $\sin(x) - x \cos(x)$       (b)  $x \sin(x) - \cos(x)$       (c)  $\sin(x) + x \cos(x)$       (d)  $x \sin(x) + \cos(x)$

.....

#### Calcul 7.5



## Dérivée des fonctions composées

### Quelques calculs généraux pour commencer

#### Calcul 9.1 — Développer.



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes.

a)  $(2x + 3)(3x - 7) \dots$

c)  $(x + 1)^2(x - 3) \dots$

b)  $(9x - 7)^2 \dots$

d)  $(x^2 + 3x + 2)^2 \dots$

#### Calcul 9.2 — Mettre au même dénominateur.



Mettre les expressions suivantes au même dénominateur, puis réduire et ordonner les numérateurs.

a)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x} \dots$

b)  $\frac{2x+3}{x-4} + \frac{3}{x-7} \dots$

c)  $\frac{1}{x^3} + \frac{2x+3}{x(x-4)} \dots$

## Fonctions composées

#### Calcul 9.3 — Application des formules usuelles (I).



Déterminer l'expression de  $f'(x)$ , où  $f$  est définie, pour  $x \in \mathbb{R}$ , par :

a)  $f(x) = 2e^{1-x^3} \dots$

c)  $f(x) = \sqrt{1+e^x} \dots$

b)  $f(x) = \frac{1}{1+e^{2x}} \dots$

d)  $f(x) = \sqrt{1+x^2} \dots$

# Primitives I

## Remarque

Dans cette fiche, pour gagner en concision, on utilisera la notion informelle d'*expression*. On s'autorisera ainsi à dire, par exemple, qu'une primitive de l'expression  $4x^3$  est l'expression  $x^4$ .

## Quelques calculs généraux pour commencer

### Calcul 11.1 — Racines et fractions.



Effectuer les calculs suivants et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

a)  $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$  .....

c)  $\frac{\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}}$  .....

b)  $\frac{\frac{1}{6} - 1}{2 - \frac{3}{5}}$  .....

d)  $\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2$  .....

### Calcul 11.2



Donner les solutions dans  $\mathbb{R}$  des équations suivantes.

a)  $5x^2 + 10x - 15 = 0$  .....

c)  $-(x - 2)^2 + 2 = 0$  .....

b)  $2x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0$  .....

d)  $(3x - 2)^2 = (1 - x)^2$  .....

### Calcul 11.3 — Quelques calculs rapides (I).



Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a)  $3x^2 - 1$  .....

c)  $\frac{1}{2}x^3 - 3x^5 + 2$  .....

b)  $-3x^{-4} - 4x^{-5}$  .....

d)  $\frac{7}{3}(1 + x + x^2)$  .....

### Calcul 11.4 — Quelques calculs rapides (II).



Déterminer les primitives des expressions suivantes.

a)  $\frac{1}{x^3}$  .....

c)  $\frac{-2}{x^4}$  .....

b)  $\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x$  .....

d)  $5e^x - 6$  .....

**Calcul 13.4 — Fonctions élémentaires (II).**

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- |   |                      |                                   |                      |
|---|----------------------|-----------------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto e^3$ .....                      | <input type="text"/> | d) $x \mapsto 2 \sin(2x)$ .....   | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto 3e^{5x} - x^2$ .....            | <input type="text"/> | e) $x \mapsto 3 \cos(3x + 5)$ ... | <input type="text"/> |
| c) $x \mapsto \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}$ ... | <input type="text"/> | f) $x \mapsto \sin(2 - 5x)$ ..... | <input type="text"/> |

**Primitives de formes remarquables**

Dans les exercices suivants, on fera apparaître des expressions de la forme

$$nu'(x)u(x)^{n-1}, \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ ou } u'(x)e^{u(x)}$$

pour primitiver les fonctions proposées.

**Calcul 13.5 — Fonction puissance (I).**

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- |   |                      |   |                      |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $x \mapsto (2x + 1)(x^2 + x)^5$ .....    | <input type="text"/> | c) $x \mapsto (x^2 + 1)(x^3 + 3x + 4)$ .      | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto (2x + 3)(x^2 + 3x + 12)^{10}$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 13.6 — Fonction puissance (II).**

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- |  |                      |                                       |                      |
|--|----------------------|---------------------------------------|----------------------|
| a) $x \mapsto (e^x + 1)^{-3}e^x$ ....  | <input type="text"/> | c) $x \mapsto x\sqrt{1 - 2x^2}$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto (e^x + 1)(e^x + x)^{22}$ | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 13.7 — Fonction puissance (III).**

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions suivantes.

- |  |                      |  |                      |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $x \mapsto \sin(x) \cos(x)$ .....   | <input type="text"/> | c) $x \mapsto (3 \sin(x) + 2)^5 \cos(x)$             | <input type="text"/> |
| b) $x \mapsto \cos(x) \sin^5(x)$ ..... | <input type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{(\cos(x) + 3)^2}$ ..... | <input type="text"/> |

**Calcul 14.5 — Équations homogènes avec condition (II).**



Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle donnée vérifiant la condition donnée.

a)  $\frac{1}{2}y' + y = \frac{1}{3}y - y'$  avec  $f(3) = e^{-1}$  .....

b)  $y' + \sqrt{2}y = 0$  avec  $f(\sqrt{2}) = 1$  .....

## Équations différentielles avec second membre

**Calcul 14.6**



On considère l'équation différentielle  $(E) : y' = y - 3$ .

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation  $(E)$  .....

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation  $y' = y$  .....

c) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation  $(E)$  .....

**Calcul 14.7**



On considère l'équation différentielle  $(E) : \sqrt{2}y' = \sqrt{6}y - 1$ .

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation  $(E)$  .....

b) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation  $\sqrt{2}y' = \sqrt{6}y$  .....

c) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation  $(E)$  .....

**Calcul 14.8 — En autonomie (I).**



Déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle :  $13y' - 3y = 12y' + 2y + \frac{35}{9}$ .

.....

**Calcul 14.9 — En autonomie (II).**



Déterminer la fonction  $f$  solution de l'équation différentielle :  $3y' - 7y = \frac{21}{25}$  telle que  $f(2) = -5$ .

.....

## Intégration I

### Quelques calculs généraux pour commencer

#### Calcul 16.1 — Des fractions.



Calculer, en donnant le résultat sous forme de fraction irréductible :

a)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots\dots$        b)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \dots\dots$        c)  $\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \dots\dots$

#### Calcul 16.2 — D'autres fractions.



Exprimer les nombres suivants sous la forme «  $2^a 5^b$  » (avec  $a, b \in \mathbb{Z}$ ).

a)  $\frac{10^2}{5^4} \dots\dots$        b)  $\frac{1}{2^2 \times \frac{1}{5^2}} \dots\dots$        c)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{10} \dots\dots$

### Premières intégrales

#### Calcul 16.3



Calculer :

a)  $\int_0^1 t \, dt \dots\dots$        b)  $\int_0^1 2t^2 \, dt \dots\dots$        c)  $\int_0^1 (-t + 1) \, dt \dots\dots$

#### Calcul 16.4 — Une formule générale.



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Combien vaut  $\int_0^1 t^n \, dt$  ?

- (a)  $n + 1$       (b)  $n - 1$       (c)  $\frac{1}{n}$       (d)  $\frac{1}{n + 1}$       (e)  $\frac{1}{n - 1}$

.....

#### Calcul 16.5 — Variations autour d'une puissance.



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer :

a)  $\int_{-1}^1 t^n \, dt \dots\dots$        c)  $1 - \int_0^1 nt^n \, dt \dots\dots$    
 b)  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^n \, dt \dots\dots$        d)  $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} t^n \, dt \dots\dots$