

**Définition et QC**

Définir ce qu'est une fonction convexe et montrer :

1. Distributivité du et sur le ou.
2. Négation de l'implication.
3. Principe de la contraposée.

**Exercice 1**

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :

(a)  $h : x \mapsto \ln(|x|) + \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$

(b)  $g : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c)  $w : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  est impaire alors  $f'$  est paire.

**Exercice 2**

1. On admet que  $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} n^k$  pour tout couple d'entiers naturels  $(p, n)$ .  
Expliciter en particulier  $(n+1)^4$  et  $(n+1)^5$ .

2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$  est un entier.

**Définition et QC**

Illustrer, sans justification, les ensembles  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  et  $A \Delta B$  avec  $A$  et  $B$  deux parties non disjointes de  $E$  un ensemble non vide et montrer que, si  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n^2$  soit pair alors  $n$  est pair et en déduire que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 1**

1. Nier les propositions suivantes :

(a)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n| < \varepsilon$ .

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$ .

(c)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$ .

2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  est 3-périodique alors  $f'$  est 3-périodique.

**Exercice 2**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

**Définition et QC**

Citer l'inégalité des pentes et faire un dessin illustrant cette inégalité et démontrer le principe de succession et le principe de la récurrence double.

**Exercice 1**

Résoudre les inéquations suivantes ( $x$  est l'inconnue,  $m$  est un paramètre) :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2} ; \qquad \sqrt{2x + m} \geq x + 1.$$

**Exercice 2**

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , on a :

$$x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

**Définition et QC**

Expliquer la notion de contraposée et démontrer une CNS pour que  $C_f$ , courbe représentative d'une fonction numérique  $f$  définie sur  $D_f \subset \mathbb{R}$ , soit symétrique par rapport à l'origine... puis généraliser!

**Exercice 1**

1. Préciser l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes puis calculer les fonctions dérivées si elles existent :

(a)  $h : x \mapsto \ln(|x|) + \ln\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)$

(b)  $g : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c)  $w : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  est impaire alors  $f'$  est paire.

**Exercice 2**

1. On admet que  $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} n^k$  pour tout couple d'entiers naturels  $(p, n)$ .

Expliciter en particulier  $(n+1)^4$  et  $(n+1)^5$ .

2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$  est un entier.

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Définir ce qu'est une fonction paire/impair/périodique puis citer les croissances comparées de manière générale mais ne les démontrer que pour les puissances valant 1.

#### Exercice 1

1. Nier les propositions suivantes :

(a)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n| < \varepsilon$ .

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$ .

(c)  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$ .

2. Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $f$  est 3-périodique alors  $f'$  est 3-périodique.

#### Exercice 2

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner l'inégalité de Jensen puis montrer que  $f$ , fonction numérique  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de réels non réduit à un point, est convexe si et seulement pour tout  $a \in I$ , la fonction  $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante. Dire, sans preuve, ce que cela va entraîner comme CNS pour les fonctions convexes dérivables puis dérivables deux fois et citer, sans preuve, l'inégalité des pentes.

### Exercice 1

Résoudre les inéquations suivantes ( $x$  est l'inconnue,  $m$  est un paramètre) :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2} ; \quad \sqrt{2x + m} \geq x + 1.$$

### Exercice 2

1. Montrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .
2. Montrer que, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ , on a :

$$x^x(1 - x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}.$$

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Rappeler la définition de  $f'(a)$  et donner l'équation à la tangente à  $C_f$  en  $(a; f(a))$  et montrer :

1. Distributivité du et sur le ou.
2. Négation de l'implication.
3. Principe de la contraposée.

## Exercice 1

1. Tracer le graphe de la fonction  $x \mapsto |x - 3| + 2|x + 1|$ .
2. Résoudre l'équation  $|x + 2| + |3x - 1| - 4 = 0$ , d'inconnue  $x$  réelle.
3. Résoudre l'inéquation  $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$ , d'inconnue  $x$  réelle.

## Exercice 2

1. On admet que  $(n + 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$  pour tout couple d'entiers naturels  $(p, n)$ .  
Expliciter en particulier  $(n + 1)^4$  et  $(n + 1)^5$ .
2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$  est un entier.

**Définition et QC**

Expliquer le raisonnement par contraposée et montrer que, si  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n^2$  soit pair alors  $n$  est pair et en déduire que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 1**

Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue  $x$  réel :

1.  $x - \frac{2}{x} > 0$ ,
2.  $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$ ,
3.  $\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15}} > 3$ .

**Exercice 2**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

## MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner quelques limites classiques obtenus par taux d'accroissement et démontrer le principe de succession et le principe de la récurrence double.

### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$ .

2. Montrer que l'application  $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$  est bijective et exprimer  $f^{-1}(y)$  pour tout  $y$  réel.

### Exercice 2

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

2. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer qu'il existe un irrationnel  $u$  tel que  $u^{\sqrt{2}}$  soit rationnel.

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Citer les lois de Morgan et la distributivité du et sur le ou, du ou sur le et et démontrer une CNS (conditions nécessaires et suffisantes) pour que  $C_f$ , courbe représentative d'une fonction numérique  $f$  définie sur  $D_f \subset \mathbb{R}$ , soit symétrique par rapport à l'origine... puis généraliser!

## Exercice 1

1. Tracer le graphe de la fonction  $x \mapsto |x - 3| + 2|x + 1|$ .
2. Résoudre l'équation  $|x + 2| + |3x - 1| - 4 = 0$ , d'inconnue  $x$  réelle.
3. Résoudre l'inéquation  $|x - 1| \leq |2x + 1| + 1$ , d'inconnue  $x$  réelle.

## Exercice 2

1. On admet que  $(n + 1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$  pour tout couple d'entiers naturels  $(p, n)$ .  
Expliciter en particulier  $(n + 1)^4$  et  $(n + 1)^5$ .
2. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$  est un entier.

**Définition et QC**

Expliquer comment obtenir le comportement asymptotique d'une fonction puis citer les croissances comparées de manière générale mais ne les démontrer que pour les puissances valant 1.

**Exercice 1**

Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue  $x$  réel :

1.  $x - \frac{2}{x} > 0$ ,
2.  $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$ ,
3.  $\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15}} > 3$ .

**Exercice 2**

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_0 = 0, u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$$

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + (-1)^{n+1}$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

**Définition et QC**

Citer la proposition sur dérivée et opérations (somme, produit, quotient, réciproque) puis montrer que  $f$ , fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  de réels non réduit à un point, est convexe si et seulement pour tout  $a \in I$ , la fonction  $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  est croissante. Dire, sans preuve, ce que cela va entraîner comme CNS pour les fonctions convexes dérivables puis dérivables deux fois et citer, sans preuve, l'inégalité des pentes.

**Exercice 1**

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$ .

2. Montrer que l'application  $f : x \mapsto \frac{x}{1 - x^2}$  est bijective et exprimer  $f^{-1}(y)$  pour tout  $y$  réel.

**Exercice 2**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ .

2. En utilisant un raisonnement par disjonction des cas, montrer qu'il existe un irrationnel  $u$  tel que  $u^{\sqrt{2}}$  soit rationnel.

**Définition et QC**

Donner les propriétés classiques de  $\ln$  et démo : Expliciter de deux façons différentes  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  avec  $x \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 1**

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue  $x$  élément de  $[-\pi, \pi]$  :

1.  $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ .
2.  $\cos(2x) = \sin(x)$ .
3.  $\cos(3x) + \sin(3x) = 1$ .

**Exercice 2**

Soit l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x+1) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1.(a) Calculer la dérivée de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .  
(b) Déterminer la limite de  $u \mapsto (1+u)e^{-u}$  en  $+\infty$ . En déduire que  $f$  est dérivable en 0.  
(c) Étudier le sens de variations de  $f$ .  
(d) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $\varphi : u \mapsto 1 - (1+u)e^{-u}$ .  
(a) Calculer la dérivée de  $\varphi$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \varphi'(u) \leq u$ .  
(c) En déduire que pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \varphi(u) \leq \frac{u^2}{2}$ .
- 3.(a) En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$ .  
(b) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une droite asymptote  $\Delta$  en  $+\infty$ . Préciser la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\Delta$ .

**Définition et QC**

Définition et tracé de  $\arcsin$  et  $\arccos$  et démo : formules avec  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

**Exercice 1**

1. Prouver de deux façons différentes que, pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ , on a :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que  $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$ .

**Exercice 2**

Soit  $n$  un entier supérieur à 2.

1. On pose  $C_n = \sum_{k=1}^n k^3$ ,  $D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$  et  $B_n = \sum_{k=1}^n k^2$ . On n'utilisera pas l'explicitation de  $B_n$  qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.

(a) Exprimer  $D_n$  en fonction de  $C_n$ .

(b) Trouver une relation entre  $D_n$ ,  $C_n$  et  $B_n$  basée sur le développement de  $(k+1)^3$  et en déduire  $B_n$ .

- 2.(a) Pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 2, n \rrbracket$ , relier  $\binom{n}{k}$  et  $\binom{n-2}{k-2}$ .

(b) En déduire  $\sum_{k=2}^n k(k-1)\binom{n}{k}$  puis  $\sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k}$ .

## MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Tracer les fonctions puissances et rappeler la définition de  $a^b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$  et démo : expliciter  $\cos(\arcsin(x))$  puis en déduire la dérivée de  $\arcsin$ .

#### Exercice 1

1. Soit  $\theta$  un réel. Exprimer, sous réserve d'existence,  $\cos(2\theta)$  et  $\sin(2\theta)$  en fonction de  $\tan(\theta)$ . On démontrera ces formules.
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ : \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{2}$ .
3. En déduire la valeur exacte de  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

#### Exercice 2

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ . Expliciter  $S_n$ .
2. On pose maintenant  $S_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Expliciter  $S_n$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 2, on pose finalement :  
$$S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \dots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \dots + 2 \times n) + \dots + ((n-1) \times n).$$
  
Montrer que :  $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n ij \right)$  avec  $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  et en déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Expliquer les échanges de sommes et démo : expliciter  $\cos(\arcsin(x))$  puis en déduire la dérivée de  $\arcsin$ .

## Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue  $x$  élément de  $[-\pi, \pi]$  :

1.  $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ .
2.  $\cos(2x) = \sin(x)$ .
3.  $\cos(3x) + \sin(3x) = 1$ .

## Exercice 2

Soit l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x+1) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1.(a) Calculer la dérivée de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .  
(b) Déterminer la limite de  $u \mapsto (1+u)e^{-u}$  en  $+\infty$ . En déduire que  $f$  est dérivable en 0.  
(c) Étudier le sens de variations de  $f$ .  
(d) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $\varphi : u \mapsto 1 - (1+u)e^{-u}$ .  
(a) Calculer la dérivée de  $\varphi$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \varphi'(u) \leq u$ .  
(c) En déduire que pour tout  $u \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \varphi(u) \leq \frac{u^2}{2}$ .
- 3.(a) En déduire que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$ .  
(b) En déduire que  $\mathcal{C}_f$  admet une droite asymptote  $\Delta$  en  $+\infty$ . Préciser la position de  $\mathcal{C}_f$  par rapport à  $\Delta$ .

## MP2I **Sujet 2**

Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Tracer les fonctions puissances et rappeler ce qu'on peut faire et ce qu'on ne peut pas faire avec les puissances et démo : formules avec  $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ .

#### Exercice 1

1. Prouver de deux façons différentes que, pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ , on a :

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que  $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$ .

#### Exercice 2

Soit  $n$  un entier supérieur à 2.

1. On pose  $C_n = \sum_{k=1}^n k^3$ ,  $D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$  et  $B_n = \sum_{k=1}^n k^2$ . On n'utilisera pas l'explicitation de  $B_n$  qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.

- (a) Exprimer  $D_n$  en fonction de  $C_n$ .  
(b) Trouver une relation entre  $D_n$ ,  $C_n$  et  $B_n$  basée sur le développement de  $(k+1)^3$  et en déduire  $B_n$ .

- 2.(a) Pour tout entier  $k$  de  $\llbracket 2, n \rrbracket$ , relier  $\binom{n}{k}$  et  $\binom{n-2}{k-2}$ .

- (b) En déduire  $\sum_{k=2}^n k(k-1)\binom{n}{k}$  puis  $\sum_{k=0}^n k^2\binom{n}{k}$ .

## MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 3

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner les formules des sommes géométriques et de  $\sum_{k=0}^n k$  et  $\sum_{k=0}^n k^2$  et démo : Expliciter de deux façons différentes  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$  avec  $x \in \mathbb{R}^*$ .

### Exercice 1

1. Soit  $\theta$  un réel. Exprimer, sous réserve d'existence,  $\cos(2\theta)$  et  $\sin(2\theta)$  en fonction de  $\tan(\theta)$ . On démontrera ces formules.
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$  :  $\frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{2}$ .
3. En déduire la valeur exacte de  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### Exercice 2

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ . Expliciter  $S_n$ .
2. On pose maintenant  $S_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right)$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Expliciter  $S_n$ .
3. Pour tout entier naturel  $n$  supérieur à 2, on pose finalement :

$$S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n).$$

Montrer que :  $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n ij \right)$  avec  $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$  et en déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Tracer de arctan et expliciter arctan' et démo : Démontrer la propriété fondamentale de ln et en déduire  $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

## Exercice 1

Expliciter  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  puis résoudre l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(2x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(2x) = 2.$$

## Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , on pose :

$$U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, R_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right), \sigma_n = \sum_{k=1}^n k^2$$

et  $S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n)$ .

1. Expliciter  $U_n$  et  $R_n$ .

2. Montrer que :  $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n ij \right)$ .

3. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

**Définition et QC**

Expliquer les sommes sur les pairs/impairs et démo : Sommes géométriques et factorisation de  $a^n - b^n$ .

**Exercice 1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , expliciter  $S_n$ ,  $P_n$  et  $Q_n$  avec :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right), \quad P_n = \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right).$$

**Exercice 2**

1. Trouver le signe de la fonction  $f$  suivante définie sur  $] -1, +\infty[$  par :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

2. En déduire les variations de la fonction  $g$  suivante définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^{2x}).$$

**Définition et QC**

Donner la formule du pion et celle du triangle de Pascal et démo : Formule du binôme de Newton.

**Exercice 1**

Montrer que  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  pour tout réel  $x$  et en déduire que pour tout  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , on a :  $\arccos(1 - x^2) = 2 \arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$ .

**Exercice 2**

On veut résoudre l'équation  $(E)$  suivante d'inconnue  $x$  réel :

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

1. Expliciter  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .
2. Exprimer  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos(x)$  pour tout réel  $x$ .
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $\theta$  réel :

$$8(\cos(\theta))^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

4. Conclure!

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Expliciter  $\arcsin'$ ,  $\arccos'$  et  $\arctan'$  et démo : Démontrer la propriété fondamentale de  $\ln$  et en déduire  $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$  avec  $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ .

## Exercice 1

Expliciter  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  puis résoudre l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(2x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(2x) = 2.$$

## Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ , on pose :

$$U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, R_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right), \sigma_n = \sum_{k=1}^n k^2$$

et  $S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n)$ .

1. Expliciter  $U_n$  et  $R_n$ .

2. Montrer que :  $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n ij \right)$ .

3. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

**Définition et QC**

Définition et tracé de  $e^x$  et  $\ln x$  et démo : Sommes géométriques et factorisation de  $a^n - b^n$ .

**Exercice 1**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , expliciter  $S_n$ ,  $P_n$  et  $Q_n$  avec :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right), \quad P_n = \prod_{k=2}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) \quad \text{et} \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right).$$

**Exercice 2**

1. Trouver le signe de la fonction  $f$  suivante définie sur  $] -1, +\infty[$  par :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

2. En déduire les variations de la fonction  $g$  suivante définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^{2x}).$$

## MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 4

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner les propriétés classiques de exp et démo : Formule du binôme de Newton.

### Exercice 1

Montrer que  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  pour tout réel  $x$  et en déduire que pour tout  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , on a :  $\arccos(1 - x^2) = 2 \arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$ .

### Exercice 2

On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue  $x$  réel :

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

1. Expliciter  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ .
2. Exprimer  $\cos(3x)$  en fonction de  $\cos(x)$  pour tout réel  $x$ .
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $\theta$  réel :

$$8(\cos(\theta))^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

4. Conclure!

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Expliquer le concept de majorant, maximum, borne supérieure et démo : Démontrer l'inégalité triangulaire pour le module.

### Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique  $\frac{1}{1+i}$  et  $\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $|z+1| = |z| + 1$ .

### Exercice 2

Soit  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ . On note  $(E)$  l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$(1+iz)^3(1-i\tan(\alpha)) = (1-iz)^3(1+i\tan(\alpha)).$$

1. Montrer que si  $z$  est solution de  $(E)$  alors  $|1+iz| = |1-iz|$ .
2. En déduire que si  $z$  est une solution de  $(E)$  alors il existe un réel  $\theta$  dans  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  tel que :  $z = \tan(\theta)$ .
3. Résoudre  $(E)$ .

**Définition et QC**

Définir la partie entière et donner ses propriétés classiques et démo : Angle moitié puis établir la factorisation de  $\cos(p) + \cos(q)$ .

**Exercice 1**

1. Écrire sous forme algébrique  $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$  et  $i(1-3i)^2$ .
2. Soient  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $z' \in \mathbb{C}$ , montrer que :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z.$$

**Exercice 2**

1. Soit  $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$ , on pose :

$$C_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb + a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb + a).$$

Expliciter  $C_n + iS_n$  puis  $C_n$  puis  $S_n$ .

2. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0, \pi]$  où  $f$  est la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2 + \sqrt{3}) \cos(2x) + (3 + 2\sqrt{3}) \cos(x) - (2 + \sqrt{3})$$

## MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Donner les formules de De Moivre et d'Euler et démo : Expliciter les racines  $n^{ième}$  et calculer leur somme.

#### Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de  $1 - i\sqrt{3}$  et  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$ .
2. Soient  $a, b, z$  trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a} \left( \frac{z - a}{z - b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

#### Exercice 2

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$\left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^3 + \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right)^3 = 2.$$

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$z^n = \frac{1 - i \tan(a)}{1 + i \tan(a)}$$

avec  $a$  un élément de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $n$  un entier naturel non nul.

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Expliquer le concept de minorant, minimum, borne inférieure et démo : Démontrer l'inégalité triangulaire pour le module.

## Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique  $\frac{1}{1+i}$  et  $\frac{(3+5i)^2}{1-2i}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $|z+1| = |z| + 1$ .

## Exercice 2

Soit  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ . On note  $(E)$  l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$(1+iz)^3(1-i\tan(\alpha)) = (1-iz)^3(1+i\tan(\alpha)).$$

1. Montrer que si  $z$  est solution de  $(E)$  alors  $|1+iz| = |1-iz|$ .
2. En déduire que si  $z$  est une solution de  $(E)$  alors il existe un réel  $\theta$  dans  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  tel que :  $z = \tan(\theta)$ .
3. Résoudre  $(E)$ .

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Définir la valeur absolue et donner ses propriétés classiques et démo : Angle moitié puis établir la factorisation de  $\cos(p) + \cos(q)$ .

#### Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique  $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$  et  $i(1-3i)^2$ .
2. Soient  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $z' \in \mathbb{C}$ , montrer que :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda z.$$

#### Exercice 2

1. Soit  $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$ , on pose :

$$C_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cos(kb + a) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb + a).$$

Expliciter  $C_n + iS_n$  puis  $C_n$  puis  $S_n$ .

2. Déterminer le signe de  $f$  sur  $[0, \pi]$  où  $f$  est la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \cos(3x) - (2 + \sqrt{3}) \cos(2x) + (3 + 2\sqrt{3}) \cos(x) - (2 + \sqrt{3})$$

## MP2I **Sujet 3**

Semaine de colle: 5

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Définir module et donner ses propriétés classiques et démo : Expliciter les racines  $n^{\text{ième}}$  et calculer leur somme.

#### Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de  $1 - i\sqrt{3}$  et  $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$ .
2. Soient  $a, b, z$  trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a} \left( \frac{z - a}{z - b} \right)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

#### Exercice 2

1. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$\left( \frac{z - 1}{z + 1} \right)^3 + \left( \frac{z + 1}{z - 1} \right)^3 = 2.$$

2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue  $z$  complexe :

$$z^n = \frac{1 - i \tan(a)}{1 + i \tan(a)}$$

avec  $a$  un élément de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $n$  un entier naturel non nul.

## MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Définir une racine  $n$ -ième et donner ses propriétés classiques et démo : Résolution d'équation du second degré à valeurs complexes.

### Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$  et  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}\right)^{2025}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que

$$z + \bar{z} = |z|.$$

### Exercice 2

1. Trouver les réels  $a$  et  $b$  tels que  $a^2 + b^2 = 1$  et  $(a+ib)^n + (a-ib)^n = 1$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Donner le lien entre  $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et en déduire que  $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$  est racine du polynôme  $A$  avec  $A : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$ .
3. Diviser l'équation  $A(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{C}^*$  par  $x^2$  et poser  $u = x - \frac{1}{x}$  dans l'équation obtenue ; en déduire la valeur exacte de  $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$ .

**Définition et QC**

Définir similitude et donner ses propriétés classiques et démo : Si  $\max(A)$  avec  $A$  partie non vide de  $\mathbb{R}$  existe alors  $\text{Sup}(A)$ ... + critère séquentiel de la borne supérieure.

**Exercice 1**

On pose  $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1 + i$ .

1. Donner la forme trigonométrique du quotient  $\frac{z_1}{z_2}$ .
2. En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ , puis de  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 2**

1. Soient  $z$  et  $z'$  deux complexes unitaires tel que  $zz' \neq -1$ . Montrer que  $\frac{z + z'}{1 + zz'}$  est un réel.
2. Calculer  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$  et  $(1 + i)^n - (1 - i)^n$  avec  $n$  un entier.
3. On pose :  $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$ ,  $S = a + a^4$  et  $T = a^2 + a^3$ . Calculer  $S + T$  et  $S \times T$ , en déduire les valeurs de  $S$  et  $T$  puis de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

### Définition et QC

Interprétation géométrique des complexes et démo : Linéarisation et "délinéarisation" sur un cas particulier mais pas trop simple non plus.

### Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique  $(1-i)\overline{(1+i)}$  et  $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z + i = \bar{z} + 1$ .

### Exercice 2

On considère les deux équations suivantes :

$$z^5 + 1 = 0 \tag{1}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \tag{2}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (4). On donnera les solutions sous forme trigonométrique la plus simple possible.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (5).
3. Déterminer la fonction polynomiale  $z \mapsto Q(z)$  telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^5 + 1 = (z + 1)Q(z).$$

On note (6) l'équation suivante :

$$Q(z) = 0 \tag{3}$$

4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (6).
5. Soit  $u \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $u + \frac{1}{u}$  est solution de (5) si, et seulement si,  $u$  est solution de (6).
6. Exprimer sous forme trigonométrique les valeurs prises par  $u + \frac{1}{u}$  lorsque  $u$  décrit l'ensemble des solutions de (6).
7. En déduire une expression de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  avec des radicaux (racines carrées).

## MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 6

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Définir l'argument et donner ses propriétés classiques et démo : Résolution d'équation du second degré à valeurs complexes.

### Exercice 1

1. Déterminer le module et un argument de  $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$  et  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{i-1}\right)^{2025}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que

$$z + \bar{z} = |z|.$$

### Exercice 2

1. Trouver les réels  $a$  et  $b$  tels que  $a^2 + b^2 = 1$  et  $(a+ib)^n + (a-ib)^n = 1$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Donner le lien entre  $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et en déduire que  $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$  est racine du polynôme  $A$  avec  $A : x \mapsto x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1$ .
3. Diviser l'équation  $A(x) = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{C}^*$  par  $x^2$  et poser  $u = x - \frac{1}{x}$  dans l'équation obtenue ; en déduire la valeur exacte de  $\tan\left(\frac{\pi}{16}\right)$ .

**Définition et QC**

Interprétation géométrique des complexes et démo : Si  $\max(A)$  avec  $A$  partie non vide de  $\mathbb{R}$  existe alors  $\text{Sup}(A)$ ... + critère séquentiel de la borne supérieure.

**Exercice 1**

On pose  $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$  et  $z_2 = 1 + i$ .

1. Donner la forme trigonométrique du quotient  $\frac{z_1}{z_2}$ .
2. En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ , puis de  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 2**

1. Soient  $z$  et  $z'$  deux complexes unitaires tel que  $zz' \neq -1$ . Montrer que  $\frac{z + z'}{1 + zz'}$  est un réel.
2. Calculer  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$  et  $(1 + i)^n - (1 - i)^n$  avec  $n$  un entier.
3. On pose :  $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$ ,  $S = a + a^4$  et  $T = a^2 + a^3$ . Calculer  $S + T$  et  $S \times T$ , en déduire les valeurs de  $S$  et  $T$  puis de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

### Définition et QC

Expliquer le concept de majorant, maximum, borne supérieure et démo : Linéarisation et "délinéarisation" sur un cas particulier mais pas trop simple non plus.

### Exercice 1

1. Écrire sous forme algébrique  $(1-i)\overline{(1+i)}$  et  $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z + i = \bar{z} + 1$ .

### Exercice 2

On considère les deux équations suivantes :

$$z^5 + 1 = 0 \tag{4}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \tag{5}$$

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (4). On donnera les solutions sous forme trigonométrique la plus simple possible.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (5).
3. Déterminer la fonction polynomiale  $z \mapsto Q(z)$  telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^5 + 1 = (z + 1)Q(z).$$

On note (6) l'équation suivante :

$$Q(z) = 0 \tag{6}$$

4. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (6).
5. Soit  $u \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $u + \frac{1}{u}$  est solution de (5) si, et seulement si,  $u$  est solution de (6).
6. Exprimer sous forme trigonométrique les valeurs prises par  $u + \frac{1}{u}$  lorsque  $u$  décrit l'ensemble des solutions de (6).
7. En déduire une expression de  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  avec des radicaux (racines carrées).

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Donner quelques primitives usuelles et démo : Primitivation par parties et changement de variables.

## Exercice 1

Soit  $m$  un entier naturel non nul. Pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \leq m$ , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} dx.$$

1. (Question indépendante!) Calculer  $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt$  et  $\int_1^2 \frac{1}{\arctan(t)(1+t^2)} dt$
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n < m$ , on a :

$$I_n = \frac{m-n}{n+1} I_{n+1}.$$

3. Expliciter, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$ .

## Exercice 2

Trouver les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3 \int_0^x f(t) dt = 2xf(x).$$

## MP2I **Sujet 2**

Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner quelques idées pour trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre deux et démo : Intégration et parité, périodicité et en déduire la valeur de  $\int_0^{2\pi} \arctan(\sin(t))dt$ .

### Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  suivante d'inconnue  $y$  fonctions dérivable :

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x}. \quad (E)$$

2. Démontrer que :  $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$  et en déduire la valeur de  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))dx$ .

### Exercice 2

Soit  $(E)$  l'équation différentielle :

$$xy' + (1 - x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. Montrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$  qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

**Définition et QC**

Expliquer comment résoudre une équation différentielle homogène d'ordre deux à coefficient constant et démo : Primitivation de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 1**

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :  $y'' + 2y' + y = 0$ . (E)
2. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :  $y'' + y' + y = \cos(x)$  (E)
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :  $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$ . (E)

**Exercice 2**

Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, p)$ , on pose :  $J_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^p(t) dt$ .

1. Calculer  $J_{0,0}$ ,  $J_{1,0}$ ,  $J_{0,1}$  et  $J_{1,1}$ .
2. Montrer que  $J_{n,p} = J_{n,p-2} - J_{n+2,p-2}$  si  $n$  est un entier naturel et si  $p$  est un entier supérieur à 2.
3. Montrer que  $J_{n,p} = \frac{p-1}{n+1} J_{n+2,p-2}$  si  $n$  est un entier naturel et si  $p$  est un entier supérieur à 2.
4. Montrer que  $J_{n,p} = \frac{p-1}{n+p} J_{n,p-2}$  si  $n$  est un entier naturel et si  $p$  est un entier supérieur à 2 et  $J_{n,p} = \frac{n-1}{n+p} J_{n-2,p}$  si  $p$  est un entier naturel et si  $n$  est un entier supérieur à 2.
5. En déduire  $J_{n,p}$  pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ .

# MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

## Définition et QC

Expliquer comment résoudre une équation différentielle homogène d'ordre deux à coefficient constant et démo : Primitivation par parties et changement de variables.

## Exercice 1

Soit  $m$  un entier naturel non nul. Pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n \leq m$ , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{m-n} dx.$$

1. (Question indépendante!) Calculer  $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt$  et  $\int_1^2 \frac{1}{\arctan(t)(1+t^2)} dt$
2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  tel que  $n < m$ , on a :

$$I_n = \frac{m-n}{n+1} I_{n+1}.$$

3. Expliciter, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n$ .

## Exercice 2

Trouver les fonctions  $f$  continues sur  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 3 \int_0^x f(t) dt = 2x f(x).$$

## MP2I **Sujet 2**

Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner quelques idées pour trouver une solution particulière à une équation différentielle linéaire d'ordre un et démo : Intégration et parité, périodicité et en déduire la valeur de  $\int_0^{2\pi} \arctan(\sin(t))dt$ .

### Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  suivante d'inconnue  $y$  fonctions dérivable :

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^x}. \quad (E)$$

2. Démontrer que :  $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)dx$  et en déduire la valeur de  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x))dx$ .

### Exercice 2

Soit  $(E)$  l'équation différentielle :

$$xy' + (1 - x)y = 3x^2 + 2.$$

1. Résoudre  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$ .
2. Montrer qu'il existe une unique solution  $f$  de  $(E)$  sur  $]0, +\infty[$  qui peut se prolonger par continuité en 0 et déterminer cette solution.

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 7

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

Expliquer comment primitiver une fraction rationnelle du type constante sur degré 2 et démo : Primitivation de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$  avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .

#### Exercice 1

Ces questions sont indépendantes :

1. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :  $y'' + 2y' + y = 0$ . (E)
2. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :  $y'' + y' + y = \cos(x)$  (E)
3. Résoudre l'équation différentielle (E) suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :  $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0$ . (E)

#### Exercice 2

Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, p)$ , on pose :  $J_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) \cos^p(t) dt$ .

1. Calculer  $J_{0,0}$ ,  $J_{1,0}$ ,  $J_{0,1}$  et  $J_{1,1}$ .
2. Montrer que  $J_{n,p} = J_{n,p-2} - J_{n+2,p-2}$  si  $n$  est un entier naturel et si  $p$  est un entier supérieur à 2.
3. Montrer que  $J_{n,p} = \frac{p-1}{n+1} J_{n+2,p-2}$  si  $n$  est un entier naturel et si  $p$  est un entier supérieur à 2.
4. Montrer que  $J_{n,p} = \frac{p-1}{n+p} J_{n,p-2}$  si  $n$  est un entier naturel et si  $p$  est un entier supérieur à 2 et  $J_{n,p} = \frac{n-1}{n+p} J_{n-2,p}$  si  $p$  est un entier naturel et si  $n$  est un entier supérieur à 2.
5. En déduire  $J_{n,p}$  pour tout  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ .

**Définition et QC**

Expliquer comment résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre un et démo :  
Résolution d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre un.

**Exercice 1**

1. Pour quels  $r$  dans  $\mathbb{K}$  la fonction  $x \mapsto \exp(rx)$  est-elle solution de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ ?
2. On suppose que le discriminant de l'équation  $X^2 + aX + b = 0$  est nul et on note  $r_0$  la racine double. Montrer que  $x \mapsto x \exp(r_0 x)$  est solution de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ .

**Exercice 2**

1. Trouver  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)$$

2. En déduire, à l'aide d'un changement de variable que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx.$$

3. Montrer de deux façons différentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

*Indication :* Utilisez le changement de variable  $u = x\sqrt{2} - 1$ .

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Expliquer la méthode de la variation de la constante pour l'ordre un et démo : Variation de la constante pour l'ordre un.

### Exercice 1

Calculer  $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$ ,  $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}$  et  $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln(t)}}{t} dt$ .

### Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue  $y$  fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9 \quad (E_1) \quad \text{et} \quad y'' - 2y' + 5y = \exp(x) \cos(2x) \quad (E_2).$$

2. Discuter suivant les valeurs du réel  $m$  de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + 2my' + y = \exp(-x).$$

3. Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \quad (E).$$

**Définition et QC**

Intégration par parties et changement de variable et démo : Soient  $r \in \mathbb{C}$ ,  $(b, c) \in \mathbb{K}^2$  et  $(H)$  l'équation différentielle  $y'' + by' + cy = 0$  d'inconnue  $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ .

- $x \mapsto \exp(rx)$  est une solution de  $(H)$  si et seulement si  $r$  est une racine du polynôme caractéristique de  $(H)$ .
- $x \mapsto x \exp(rx)$  est une solution de  $(H)$  si  $r$  est une racine double du polynôme caractéristique de  $(H)$ .

**Exercice 1**

Calculer  $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$  et enfin  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))} dt$ .

**Exercice 2**

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + y = \sin(\lambda x) \quad (E_\lambda)$$

où  $\lambda$  est un réel non nul tel que  $\lambda^2 \neq 1$ .

2. Discuter suivant les valeurs du réel  $m$  de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + 2my' + y = 0.$$

3. On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  :

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2 \quad (E).$$

- (a) On suppose que  $f$  vérifie  $(E)$ . On pose alors  $g : t \mapsto f(e^t)$ . Montrer que  $g$  vérifie  $(E')$  une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
- (b) Résoudre  $(E')$  sachant qu'il existe  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  soit solution de  $(E')$ .
- (c) En déduire les solutions de  $(E)$ .

**Définition et QC**

Donner quelques primitives usuelles et démo : Résolution d'une équation différentielle homogène linéaire d'ordre un.

**Exercice 1**

1. Pour quels  $r$  dans  $\mathbb{K}$  la fonction  $x \mapsto \exp(rx)$  est-elle solution de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ ?
2. On suppose que le discriminant de l'équation  $X^2 + aX + b = 0$  est nul et on note  $r_0$  la racine double. Montrer que  $x \mapsto x \exp(r_0 x)$  est solution de l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$ .

**Exercice 2**

1. Trouver  $a \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right)$$

2. En déduire, à l'aide d'un changement de variable que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx.$$

3. Montrer de deux façons différentes que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{8} \pi.$$

*Indication :* Utilisez le changement de variable  $u = x\sqrt{2} - 1$ .

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 8

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

Donner quelques primitives usuelles mais pas celles de votre voisin de gauche et démo :  
Variation de la constante pour l'ordre un.

### Exercice 1

Calculer  $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$ ,  $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}$  et  $\int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln(t)}}{t} dt$ .

### Exercice 2

1. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue  $y$  fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' - 7y' + 10y = 10x^2 - 24x + 9 \quad (E_1) \quad \text{et} \quad y'' - 2y' + 5y = \exp(x) \cos(2x) \quad (E_2).$$

2. Discuter suivant les valeurs du réel  $m$  de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + 2my' + y = \exp(-x).$$

3. Résoudre l'équation différentielle  $(E)$  suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable :

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2 = 0. \quad (E).$$

**Définition et QC**

Espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre un et démo : Soient  $r \in \mathbb{C}$ ,  $(b, c) \in \mathbb{K}^2$  et  $(H)$  l'équation différentielle  $y'' + by' + cy = 0$  d'inconnue  $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$ .

- $x \mapsto \exp(rx)$  est une solution de  $(H)$  si et seulement si  $r$  est une racine du polynôme caractéristique de  $(H)$ .
- $x \mapsto x \exp(rx)$  est une solution de  $(H)$  si  $r$  est une racine double du polynôme caractéristique de  $(H)$ .

**Exercice 1**

Calculer  $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt$ ,  $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$  et enfin  $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\exp(\cos(t))} dt$ .

**Exercice 2**

1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + y = \sin(\lambda x) \quad (E_\lambda)$$

où  $\lambda$  est un réel non nul tel que  $\lambda^2 \neq 1$ .

2. Discuter suivant les valeurs du réel  $m$  de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  :

$$y'' + 2my' + y = 0.$$

3. On veut résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue  $y$  fonctions deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  :

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2 \quad (E).$$

- (a) On suppose que  $f$  vérifie  $(E)$ . On pose alors  $g : t \mapsto f(e^t)$ . Montrer que  $g$  vérifie  $(E')$  une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
- (b) Résoudre  $(E')$  sachant qu'il existe  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  soit solution de  $(E')$ .
- (c) En déduire les solutions de  $(E)$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Combien un système linéaire peut-il avoir de solutions ?

**Démonstration:** Démontrer que le produit matriciel (en cas d'existence) est associatif.

**Exercice 1**

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -y + 2z + 3t & = & 0 \\ 2x + 2y - z & = & 0 \\ 3x - y + 2z - 2t & = & 0 \\ 5x + y + z - 2t & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{puis} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y - 7z + 2t & = & 1 \\ 2x + 2y + z + 2t & = & 0 \\ x - y - 2z + t & = & -1 \\ x + 7y - 4z + t & = & 3 \end{array} \right.$$

**Exercice 2**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I_3$  la matrice unité de taille 3.

1. Calculer  $A^2$  puis trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = aA + bI_3$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P = X^{n+1} - 2X^n - X + 2$ .
  - (a) Montrer que  $P$  admet deux racines évidentes. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que ces racines sont simples.
  - (b) En déduire un polynôme de degré 2 qui divise  $P$ .
3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^{n+1} - 2A^n - A + 2I_3 = 0$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $G_n = A^n + A - 2I_3$ . Trouver une relation de récurrence entre  $G_{n+1}$  et  $G_n$ , puis en déduire  $A^n$  en fonction de  $n$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Donner le terme générale de  $AB$  avec  $A$  et  $B$  deux matrices.

**Démonstration:** Transposée d'une somme, produit, inverse.

**Exercice 1**

Résoudre les systèmes suivants en fonction de la valeur de  $m$ .

$$1. \begin{cases} x + y + -z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases} \quad . \quad 2. \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases} .$$

**Exercice 2**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe des entiers naturels  $x_n$  et  $y_n$  tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix} .$$

2. Montrer que la suite  $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et déterminer la valeur de  $x_n - y_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
3. En déduire une relation entre  $x_{n+1}$  et  $x_n$  valable pour tout entier naturel  $n$ , puis déterminer  $x_n$  en fonction de  $n$ .
4. En déduire l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Matrices et opérations élémentaires : quelques explications...

**Démonstration:** Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

**Exercice 1**

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 3y - 7z + 2t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$
2. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x^6 + xy + z = 5 \\ x^2 - x^3 = 0 \\ 6x + 5y + 2z = 13 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 2**

1. Soit  $B$  la matrice d'ordre 3 remplie de 1. Calculer  $B^k$  pour tout entier naturel  $k$ .
2. Proposer trois façons différentes de prouver que  $B$  n'est pas inversible.
3. Pour tout réel  $t$  de  $] -1, 1[$ , on pose :

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que, pour tout  $(t, t')$  dans  $] -1, 1[^2$ , il existe  $s$  dans  $] -1, 1[$  tel que :

$$A_s = A_t \times A_{t'}.$$

- (b) En déduire que  $A_t$  est inversible et donner son inverse.

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Combien un système linéaire peut-il avoir de solutions ?

**Démonstration:** Démontrer que le produit matriciel (en cas d'existence) est associatif.

**Exercice 1**

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -y + 2z + 3t & = & 0 \\ 2x + 2y - z & = & 0 \\ 3x - y + 2z - 2t & = & 0 \\ 5x + y + z - 2t & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{puis} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x + 3y - 7z + 2t & = & 1 \\ 2x + 2y + z + 2t & = & 0 \\ x - y - 2z + t & = & -1 \\ x + 7y - 4z + t & = & 3 \end{array} \right.$$

**Exercice 2**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I_3$  la matrice unité de taille 3.

1. Calculer  $A^2$  puis trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = aA + bI_3$ .
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P = X^{n+1} - 2X^n - X + 2$ .
  - (a) Montrer que  $P$  admet deux racines évidentes. Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrer que ces racines sont simples.
  - (b) En déduire un polynôme de degré 2 qui divise  $P$ .
3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^{n+1} - 2A^n - A + 2I_3 = 0$ .
4. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $G_n = A^n + A - 2I_3$ . Trouver une relation de récurrence entre  $G_{n+1}$  et  $G_n$ , puis en déduire  $A^n$  en fonction de  $n$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Donner le terme générale de  $AB$  avec  $A$  et  $B$  deux matrices.

**Démonstration:** Transposée d'une somme, produit, inverse.

**Exercice 1**

Résoudre les systèmes suivants en fonction de la valeur de  $m$ .

$$1. \begin{cases} x + y + -z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases} \quad . \quad 2. \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases} \quad .$$

**Exercice 2**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe des entiers naturels  $x_n$  et  $y_n$  tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la suite  $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et déterminer la valeur de  $x_n - y_n$  pour tout entier naturel  $n$ .
3. En déduire une relation entre  $x_{n+1}$  et  $x_n$  valable pour tout entier naturel  $n$ , puis déterminer  $x_n$  en fonction de  $n$ .
4. En déduire l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel non nul  $n$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Matrices et opérations élémentaires : quelques explications...

**Démonstration:** Démontrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

**Exercice 1**

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 3y - 7z + 2t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$
2. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x^6 + xy + z = 5 \\ x^2 - x^3 = 0 \\ 6x + 5y + 2z = 13 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 2**

1. Soit  $B$  la matrice d'ordre 3 remplie de 1. Calculer  $B^k$  pour tout entier naturel  $k$ .
2. Proposer trois façons différentes de prouver que  $B$  n'est pas inversible.
3. Pour tout réel  $t$  de  $] -1, 1[$ , on pose :

$$A_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Montrer que, pour tout  $(t, t')$  dans  $] -1, 1[^2$ , il existe  $s$  dans  $] -1, 1[$  tel que :

$$A_s = A_t \times A_{t'}.$$

- (b) En déduire que  $A_t$  est inversible et donner son inverse.

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Inconnue auxiliaire : c'est quoi ?

**Démonstration:** Matrices de transvection : opération élémentaire modélisée, inversibilité.

### Exercice 1

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 2t = 0 \\ 5x + y + z - 2t = 1 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$

2. Résoudre le système 
$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (X, Y) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2.$$

### Exercice 2

On pose  $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, (I_n - A) \times \left( \sum_{k=0}^{p-1} A^k \right) = I_n - A^p.$$

2. En déduire que  $I_{n+1} - A$  est inversible si  $A$  est nilpotente et calculer son inverse.

3. En déduire que  $B$  est inversible et calculer  $B^{-1}$ .

4. Utiliser une autre méthode pour montrer que  $B$  est inversible et pour calculer  $B^{-1}$ .

5. Calculer  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Expression des solutions d'un système de taille deux à l'aide de déterminants.

**Démonstration:** Algorithme du miroir.

### Exercice 1

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 3y - z + t &= 1 \\ 2x + 13y - 7z + 2t &= 2 \\ x - y + z + t &= 0 \\ x + 7y - 4z + t &= -1 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$

2. Discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , le système suivant d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  :

$$\begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{cases}$$

### Exercice 2

On suppose que  $M$  est une matrice carrée antisymétrique de taille  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) à coefficient dans  $\mathbb{R}$ . On admet que  $I_n + M$  est alors une matrice inversible. On pose :

$$C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}.$$

1. Montrer que  $I_n - M$  est inversible puis que  $C$  est inversible.
2. Montrer que  $C^T = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$ .
3. Montrer que, si  $U$  et  $V$  sont des matrices carrées de même taille telles que  $V$  est inversible et  $U \times V = V \times U$ , alors

$$U \times V^{-1} = V^{-1} \times U.$$

4. En déduire que  $C^T = C^{-1}$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Formule du binôme de Newton pour les matrices : formule ?  
Hypothèse ?

**Démonstration:** Inverse et opérations puis inverse d'une matrice d'ordre 2.

#### Exercice 1

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} 5x + 15y - 35z + 10t &= 5 \\ 2x + 2y + z + 2t &= 0 \\ 7x - 7y - 14z + 7t &= -7 \\ 10x + 70y - 40z + 10t &= 30 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$
2. Résoudre le système 
$$\begin{cases} 4 \cos(\theta) \cos(\varphi) = \sqrt{6} \\ 4 \sin(\theta) \sin(\varphi) = \sqrt{2} \end{cases} \text{ d'inconnue } (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

#### Exercice 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Calculer  $A^3$ . En déduire une expression de  $A^3$  en fonction de  $A$ .
2.  $A$  est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer le polynôme  $Q$  tel que  $Q(X + 1) = X^3 + 6X$ .
4. Que vaut  $Q(A + I)$  ?
5. En déduire que  $I + A$  est inversible et calculer sa matrice inverse.

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Matrice inversible et opérations : inverse d'inverse, de produit, de transposée, de somme ?

**Démonstration :** Matrices de transvection : opération élémentaire modélisée, inversibilité.

### Exercice 1

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} -y + 2z + 3t = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 2z - 2t = 0 \\ 5x + y + z - 2t = 1 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$
2. Résoudre le système 
$$\begin{cases} X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (X, Y) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}))^2.$$

### Exercice 2

On pose  $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, (I_n - A) \times \left( \sum_{k=0}^{p-1} A^k \right) = I_n - A^p.$$

2. En déduire que  $I_{n+1} - A$  est inversible si  $A$  est nilpotente et calculer son inverse.
3. En déduire que  $B$  est inversible et calculer  $B^{-1}$ .
4. Utiliser une autre méthode pour montrer que  $B$  est inversible et pour calculer  $B^{-1}$ .
5. Calculer  $B^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Inverse et matrice triangulaire : on peut dire quoi ?

**Démonstration :** Algorithme du miroir.

### Exercice 1

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} x + 3y - z + t &= 1 \\ 2x + 13y - 7z + 2t &= 2 \\ x - y + z + t &= 0 \\ x + 7y - 4z + t &= -1 \end{cases} \quad \text{d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$

2. Discuter et résoudre, suivant la valeur du couple de paramètres  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ , le système suivant d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  :

$$\begin{cases} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{cases}$$

### Exercice 2

On suppose que  $M$  est une matrice carrée antisymétrique de taille  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) à coefficient dans  $\mathbb{R}$ . On admet que  $I_n + M$  est alors une matrice inversible. On pose :

$$C = (I_n - M) \times (I_n + M)^{-1}.$$

1. Montrer que  $I_n - M$  est inversible puis que  $C$  est inversible.
2. Montrer que  $C^T = (I_n - M)^{-1} \times (I_n + M)$ .
3. Montrer que, si  $U$  et  $V$  sont des matrices carrées de même taille telles que  $V$  est inversible et  $U \times V = V \times U$ , alors

$$U \times V^{-1} = V^{-1} \times U.$$

4. En déduire que  $C^T = C^{-1}$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 10

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir matrices triangulaires, scalaires, élémentaires, antisymétriques et nilpotentes.

**Démonstration :** Inverse et opérations puis inverse d'une matrice d'ordre 2.

#### Exercice 1

1. Résoudre le système 
$$\begin{cases} 5x + 15y - 35z + 10t &= 5 \\ 2x + 2y + z + 2t &= 0 \\ 7x - 7y - 14z + 7t &= -7 \\ 10x + 70y - 40z + 10t &= 30 \end{cases} \text{ d'inconnue } (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4.$$
2. Résoudre le système 
$$\begin{cases} 4 \cos(\theta) \cos(\varphi) = \sqrt{6} \\ 4 \sin(\theta) \sin(\varphi) = \sqrt{2} \end{cases} \text{ d'inconnue } (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

#### Exercice 2

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $I$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Calculer  $A^3$ . En déduire une expression de  $A^3$  en fonction de  $A$ .
2.  $A$  est-elle inversible? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer le polynôme  $Q$  tel que  $Q(X + 1) = X^3 + 6X$ .
4. Que vaut  $Q(A + I)$ ?
5. En déduire que  $I + A$  est inversible et calculer sa matrice inverse.

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Limite et somme des suites arithmétiques

**Démonstration:** Théorème de la limite monotone.

#### Exercice 1

Soit  $x$  un réel. Donner les natures des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \text{ et } w_n = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n}.$$

#### Exercice 2

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \right)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = a, u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$ .
3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $|v_n| \leq x_n$  avec  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$x_0 = \left| \frac{\sqrt{a}}{2} - 1 \right| \text{ et } x_1 = \left| \frac{\sqrt{b}}{2} - 1 \right| \text{ et, pour tout entier naturel } n, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

4. Expliciter  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Explication des suites récurrentes linéaire d'ordre 2

**Démonstration:** Les suites adjacentes.

### Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1.  $y_0 = 0, y_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2y_n = y_{n+1} + y_{n-1}$ .
2.  $x_0 = 1, x_1 = e$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^2 = x_{n+2}x_n$ .
3.  $w_0 = 11, w_1 = 25$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} + 2w_{n+1} + w_n = 20$ .

### Exercice 2

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = a$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Étudier  $f : x \mapsto \frac{x + x^2}{2}$  et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[.$$

2. En déduire la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $L$ , alors  $L = 0$  ou  $L = 1$ .
4. En déduire la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. Procéder de même avec la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $v_0 = |a|$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer le théorème des gendarmes et de passage à la limite dans les inégalités

**Démonstration:** Explication des suites arithmético-géométriques.

#### Exercice 1

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 \in [0, 1]$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Étudier  $f : x \mapsto x - x^2$  et en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ .
2. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
3. Donner la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Exercice 2

1. Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un réel  $k$  de  $]0, 1[$  tels que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et de limite nulle.
2. Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergeant respectivement vers  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} \right) = ab.$$

3. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 1.$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et que leur limite vaut 1.

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Limite et somme des suites géométriques

**Démonstration :** Théorème de la limite monotone.

#### Exercice 1

Soit  $x$  un réel. Donner les natures des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de terme général définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}, v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \text{ et } w_n = \frac{\lfloor xn \rfloor}{n}.$$

#### Exercice 2

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement supérieurs à 1. On étudie la suite numérique  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 \right)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = a, u_1 = b \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et est supérieur à 1.
2. Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$ .
3. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $|v_n| \leq x_n$  avec  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$x_0 = \left| \frac{\sqrt{a}}{2} - 1 \right| \text{ et } x_1 = \left| \frac{\sqrt{b}}{2} - 1 \right| \text{ et, pour tout entier naturel } n, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{3}.$$

4. Expliciter  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
5. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Illustration graphique des suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)$ ...

**Démonstration :** Explicitation des suites arithmético-géométriques.

#### Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1.  $y_0 = 11$ ,  $y_1 = 25$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $4y_n = y_{n+1} - 12y_{n-1}$ .
2.  $x_0 = \exp(11)$ ,  $x_1 = \exp(25)$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $x_{n+2}^2 = x_{n+1}^3 \times x_n^2$ .
3.  $w_0 = 11$ ,  $w_1 = 25$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2w_{n+2} - 3w_{n+1} - 2w_n = 4$ .

#### Exercice 2

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0$  quelconque et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}.$$

1. Étudier  $f : x \mapsto \frac{x + x^2}{2}$  et en déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  appartient à  $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ .
2. En déduire, en fonction de  $u_0$ , la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $L$ , alors  $L = 0$  ou  $L = 1$ .
4. En déduire, en fonction de  $u_0$ , la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 11

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Donner la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 5$  avec des quantificateurs.

**Démonstration :** Les suites adjacentes.

### Exercice 1

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 \in [0, 1]$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Étudier  $f : x \mapsto x - x^2$  et en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ .
2. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
3. Donner la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 2

1. Soit une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un réel  $k$  de  $]0, 1[$  tels que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|u_{n+1}| \leq k|u_n|$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et de limite nulle.
2. Soient  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergeant respectivement vers  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} \right) = ab.$$

3. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 1.$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes et que leur limite vaut 1.

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 12

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir les suites extraites et citer le théorème de Bolzano-Weierstrass

**Démonstration:** Unicité de la limite.

### Exercice 1

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , étudier la convergence de  $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  suite définie par : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$1. u_{1,n} = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2n}$$

$$3. u_{3,n} = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$2. u_{2,n} = \frac{2^n - 3^n + \sin(n)}{2^n + 3^n}$$

$$4. u_{4,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{n}$$

### Exercice 2

On définit les suites  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $n$  non nul, on a :  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .

2. En déduire la limite de la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

3. Montrer que, pour tout entier réel  $x$  strictement supérieur à  $-1$ , on a :  $\ln(1+x) \leq x$ .

4. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

5. Montrer que, pour tout entier  $n$  non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

6. Déduire de la question précédente la limite de la suite  $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 12

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Donner la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$  avec des quantificateurs.

**Démonstration:**  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  : lien avec la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites définies par :  $u_0 = 1, v_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ . Soit  $n$  un entier naturel.

1. Montrer que  $u_n > 0, v_n > 0$  et  $u_n \leq v_n$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et déterminer la valeur de la limite commune de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### Exercice 2

On va établir de deux façons différentes la convergence de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est une suite bornée vérifiant :  $a_{n+2} \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Démontrer le résultat dans le cas où on a une égalité.
- 2.(a) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ . Montrer que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $b$ . On pose  $a = \frac{3}{5}b$ .  
(b) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $|a_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|a_n - a| + \frac{\varepsilon}{6}$  à partir d'un certain rang.  
(c) En déduire la convergence de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. On va établir à nouveau ce résultat. On pose  $c_0 = c$ , avec  $c$  la limite d'une suite extraite convergente de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $c_{n+1} = \frac{3}{2}(b - c_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . Montrer que  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et bornée, expliciter  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et conclure !

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 12

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Explication des suites récurrentes linéaire d'ordre 2

**Démonstration:** Limite d'une somme de suites réelles convergentes, de produit de suites réelles convergentes.

#### Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1.  $x_0 = 3, x_1 = 5$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ .
2.  $y_0 = 1, y_1 = 2$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, 9y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$ .
3.  $t_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} = 2t_n$ .
4.  $u_0 = e^3, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ .

#### Exercice 2

Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :  $u_0 = a$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \text{ et } v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n).$$

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
2. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. Calculer  $v_{n+1} - v_n$  et en déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée puis convergente. On note  $L$  sa limite.
4. Montrer que :  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right)$ .
5. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{\exp(2^n L)} \right) = 1$ .

**Définition et QC****Définition/ Explication :** Illustration graphique des suites du type  $u_{n+1} = f(u_n)...$ **Démonstration :** Unicité de la limite.**Exercice 1**

Pour tout  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , étudier la convergence de  $(u_{i,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  suite définie par : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

1.  $u_{1,n} = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2n}$

3.  $u_{3,n} = \ln(n+1) - \ln(n)$

2.  $u_{2,n} = \frac{2^n - 3^n + \sin(n)}{2^n + 3^n}$

4.  $u_{4,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{n}$

**Exercice 2**

On définit les suites  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

1. Montrer que, pour tout entier  $n$  non nul, on a :  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .

2. En déduire la limite de la suite  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

3. Montrer que, pour tout entier réel  $x$  strictement supérieur à  $-1$ , on a :  $\ln(1+x) \leq x$ .

4. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

5. Montrer que, pour tout entier  $n$  non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \text{ et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right).$$

6. Déduire de la question précédente la limite de la suite  $(H_{2n} - H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 12

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Théorème de minoration, majoration, passage à la limite dans les inégalités

**Démonstration :**  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  : lien avec la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Exercice 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les deux suites définies par :  $u_0 = 1, v_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ . Soit  $n$  un entier naturel.

1. Montrer que  $u_n > 0, v_n > 0$  et  $u_n \leq v_n$ .
2. En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et qu'elles convergent vers la même limite.
3. Étudier la suite  $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et déterminer la valeur de la limite commune de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

#### Exercice 2

On va établir de deux façons différentes la convergence de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est une suite bornée vérifiant :  $a_{n+2} \leq \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Démontrer le résultat dans le cas où on a une égalité.
- 2.(a) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $b_n = a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n$ . Montrer que  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $b$ . On pose  $a = \frac{3}{5}b$ .  
(b) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $|a_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3}|a_n - a| + \frac{\varepsilon}{6}$  à partir d'un certain rang.  
(c) En déduire la convergence de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. On va établir à nouveau ce résultat. On pose  $c_0 = c$ , avec  $c$  la limite d'une suite extraite convergente de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $c_{n+1} = \frac{3}{2}(b - c_n)$  pour tout entier naturel  $n$ . Montrer que  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et bornée, expliciter  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et conclure !

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 12

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Donner la définition de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty$  avec des quantificateurs.

**Démonstration :** Limite d'une somme de suites réelles convergentes, de produit de suites réelles convergentes.

#### Exercice 1

Expliciter les suites définies par :

1.  $x_0 = 3, x_1 = 5$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ .
2.  $y_0 = 1, y_1 = 2$  et :  $\forall n \in \mathbb{N}, 9y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n$ .
3.  $t_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} = 2t_n$ .
4.  $u_0 = e^3, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ .

#### Exercice 2

Soient  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par :  $u_0 = a$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^2 \text{ et } v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n).$$

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
2. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
3. Calculer  $v_{n+1} - v_n$  et en déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée puis convergente. On note  $L$  sa limite.
4. Montrer que :  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq v_{n+p+1} - v_n \leq \frac{1}{2^n} \ln \left( 1 + \frac{1}{u_n} \right)$ .
5. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{\exp(2^n L)} \right) = 1$ .

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition d'un groupe

**Démonstration:** Composée (en cas d'existence) de deux injections, surjections, bijections...

### Exercice 1

On considère deux groupes  $G$  et  $G'$  et une application  $\varphi : G \mapsto G'$ . On définit l'ensemble :

$$H = \{(x, \varphi(x)); x \in G\}$$

Montrer l'équivalence :

$$\varphi \text{ morphisme} \iff H \text{ sous-groupe de } G \times G'.$$

### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A$  une partie de  $E$  et les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cap A \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cup A \end{cases}.$$

1. On suppose uniquement dans cette question que  $A \neq E$ . Il existe donc un élément  $a$  de  $E$  tel que  $a \notin A$ .
  - (a) Déterminer  $f(\{a\})$  et  $f(\emptyset)$ .
  - (b) Le sous-ensemble  $\{a\}$  admet-il un antécédent par  $f$ ?
  - (c)  $f$  est-elle injective, surjective?
2.  $f$  est-elle injective, surjective?
3.  $g$  est-elle injective, surjective?

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 13

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition d'un morphisme de groupe

**Démonstration:** Montrer que la relation de congruence modulo  $n$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

### Exercice 1

1. Montrer que  $\{2^n 3^m, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$  muni de la multiplication est un groupe.
2. Montrer que  $(E, \star)$  est un groupe avec  $E$  un ensemble non-vidé muni d'une loi de composition interne  $\star$  associative telle que :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad \exists (x, y) \in E^2, \quad b = a \star x = y \star a.$$

### Exercice 2

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :  $f(x, y) = \ln \left( \frac{1 - x^2}{1 + y} \right)$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x, y) = 0$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,
3. Déterminer le domaine de définition  $D_g$  de la fonction  $g : t \mapsto f(0, t)$  et étudier ses variations sur  $D_g$  (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application  $f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$  est-elle injective ? surjective ? Justifier.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 13

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir les relations d'ordre

**Démonstration:** Si  $f$  est bijective,  $f^{-1}$  l'est et si  $f \circ g$  est bijective alors  $(f \circ g)^{-1}$  est ... .

#### Exercice 1

On considère la loi de composition interne  $\star$  définie sur  $\mathbb{Z}$  par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad a \star b = a + (-1)^a b.$$

1.  $\star$  est-elle commutative ?
2. Montrer que  $(\mathbb{Z}, \star)$  est un groupe.
3. Expliciter  $x^{-1}$  quand  $x \in \mathbb{Z}$ .

#### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble. Si  $X$  et  $Y$  sont deux parties de  $E$ , on note  $X \Delta Y$  la partie de  $E$  définie par :

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

- 1.(a) Faire un dessin représentant  $X$  et  $Y$  et hachurer la partie  $X \Delta Y$  de  $E$ .  
(b) Montrer :  $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $f_A$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E)$  définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f_A(X) = X \Delta A.$$

- (a) Montrer :  $\forall X \in \mathcal{P}(E), (X \Delta A) \Delta A = X$ . Que cela signifie-t-il sur l'application  $f_A \circ f_A$  ?
- (b) En déduire que  $f_A$  est bijective et expliciter la bijection réciproque  $f_A^{-1}$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définition d'un anneau

**Démonstration :** Composée (en cas d'existence) de deux injections, surjections, bijections...

#### Exercice 1

On considère deux groupes  $G$  et  $G'$  et une application  $\varphi : G \mapsto G'$ . On définit l'ensemble :

$$H = \{(x, \varphi(x)); x \in G\}$$

Montrer l'équivalence :

$$\varphi \text{ morphisme} \iff H \text{ sous-groupe de } G \times G'.$$

#### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble non vide et  $A$  une partie de  $E$  et les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cap A \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cup A \end{cases}.$$

1. On suppose uniquement dans cette question que  $A \neq E$ . Il existe donc un élément  $a$  de  $E$  tel que  $a \notin A$ .
  - (a) Déterminer  $f(\{a\})$  et  $f(\emptyset)$ .
  - (b) Le sous-ensemble  $\{a\}$  admet-il un antécédent par  $f$ ?
  - (c)  $f$  est-elle injective, surjective?
2.  $f$  est-elle injective, surjective?
3.  $g$  est-elle injective, surjective?

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 13

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Injection : définition, illustration d'une injection, d'une non injection

**Démonstration :** Montrer que la relation de congruence modulo  $n$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Z}$ .

### Exercice 1

1. Montrer que  $\{2^n 3^m, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$  muni de la multiplication est un groupe.
2. Montrer que  $(E, \star)$  est un groupe avec  $E$  un ensemble non-vidé muni d'une loi de composition interne  $\star$  associative telle que :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad \exists (x, y) \in E^2, \quad b = a \star x = y \star a.$$

### Exercice 2

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose :  $f(x, y) = \ln \left( \frac{1 - x^2}{1 + y} \right)$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x, y) = 0$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,
3. Déterminer le domaine de définition  $D_g$  de la fonction  $g : t \mapsto f(0, t)$  et étudier ses variations sur  $D_g$  (en précisant les limites aux bornes).
4. L'application  $f \in \mathcal{F}(D_f, \mathbb{R})$  est-elle injective ? surjective ? Justifier.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 13

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir les relations binaires, les relations transitives et les relations antisymétriques.

**Démonstration :** Si  $f$  est bijective,  $f^{-1}$  l'est et si  $f \circ g$  est bijective alors  $(f \circ g)^{-1}$  est ... .

#### Exercice 1

On considère la loi de composition interne  $\star$  définie sur  $\mathbb{Z}$  par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \quad a \star b = a + (-1)^a b.$$

1.  $\star$  est-elle commutative ?
2. Montrer que  $(\mathbb{Z}, \star)$  est un groupe.
3. Expliciter  $x^{-1}$  quand  $x \in \mathbb{Z}$ .

#### Exercice 2

Soit  $E$  un ensemble. Si  $X$  et  $Y$  sont deux parties de  $E$ , on note  $X \Delta Y$  la partie de  $E$  définie par :

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

- 1.(a) Faire un dessin représentant  $X$  et  $Y$  et hachurer la partie  $X \Delta Y$  de  $E$ .  
(b) Montrer :  $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $f_A$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(E)$  définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \quad f_A(X) = X \Delta A.$$

- (a) Montrer :  $\forall X \in \mathcal{P}(E), (X \Delta A) \Delta A = X$ . Que cela signifie-t-il sur l'application  $f_A \circ f_A$  ?
- (b) En déduire que  $f_A$  est bijective et expliciter la bijection réciproque  $f_A^{-1}$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Expliquer les concepts d'images directes et réciproques  
**Démonstration:** Lien entre injection et noyau pour un morphisme de groupes.

#### Exercice 1

Soit  $f$  une fonction numérique telle que, pour tout  $x$  réel, sous réserve d'existence, on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition  $D$  de  $f$
2.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est-elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer  $D_0$  de sorte que la restriction de  $f$  à  $D_0$  au départ et  $f(D)$  à l'arrivée soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

#### Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes. Soient un groupe  $(G, \cdot)$  et deux sous-groupes  $H$  et  $K$  du groupe  $G$ . On note :

$$HK = \{h \cdot k, h \in H, k \in K\} \text{ et } KH = \{k \cdot h, h \in H, k \in K\}$$

$$\text{et } f : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe  $G$  est commutatif.
- 2.(a) Soit  $x \in G$ . Montrer que :

$$x \in HK \iff x^{-1} \in KH.$$

- (b) Montrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $KH$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $HK = KH$ .

**Définition et QC****Définition/ Explication: Complétez :**

- Si  $g$  et  $f$  sont injectives alors ...
- Si  $g \circ f$  est injective alors ...

**Démonstration:** Soient  $f$  un morphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$  et  $H'$  un sous-groupe de  $G'$ , alors  $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$ .**Exercice 1**

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, ]0, 1])$  définie par  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ . Montrer que  $f$  est bijective puis expliciter  $f([1, 2])$  et  $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$ .
2. On définit la relation  $\mathcal{R}$  binaire sur  $\mathbb{C}^2$  par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

- (a) Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- (b) Déterminer les classes d'équivalence associées à cette relation.

**Exercice 2**Soit un anneau  $(A, +, \times)$  et deux éléments  $a, b$  de  $A$ . On dit qu'un élément  $a \in A$  est nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ .

1. Si  $(ab)$  est un élément nilpotent, montrer que  $1 - ab$  est inversible et déterminer  $(1 - ab)^{-1}$ .
2. Si  $(ab)$  et  $(ba)$  sont nilpotents, exprimer  $(1 - ba)^{-1}$  en fonction de  $(1 - ab)^{-1}$ .
3. On ne suppose plus  $(ab)$  ni  $(ba)$  nilpotents. Montrer que si  $1 - ab$  est inversible, alors  $1 - ba$  est également inversible.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 14

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication: Complétez :** Si  $f$  et  $g$  sont bijectives alors .... et :  $(g \circ f)^{-1} \dots$

**Démonstration:** Intersection de sous-groupes.

#### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par  $f : x \mapsto x \sin(x)$ .  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?
2. Soient un ensemble  $E$  et une application injective  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ . On définit la relation  $\mathcal{R}$  binaire sur  $E$  par :

$$\forall (z, z') \in E^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow f(z) \leq f(z').$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre.

#### Exercice 2

Soit un anneau  $(A, +, \times)$ . On dit qu'un élément  $a \in A$  est nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ .

1. Montrer que, si  $a$  est nilpotent, alors  $1 - a$  est inversible et calculer son inverse.
2. Soit un élément  $a \in A$ . On définit l'application  $u : \begin{cases} A & \rightarrow A \\ x & \rightarrow u(x) = ax - xa \end{cases}$ .  
Déterminer l'application  $u^p = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{p \text{ fois}}$ .
3. Montrer que, si  $a$  est nilpotent, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p$  soit l'application nulle.

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Surjection : définition, illustration d'une surjection, d'une non surjection

**Démonstration :** Lien entre injection et noyau pour un morphisme de groupes.

#### Exercice 1

Soit  $f$  une fonction numérique telle que, pour tout  $x$  réel, sous réserve d'existence, on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Donner le domaine de définition  $D$  de  $f$
2.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  est-elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer  $D_0$  de sorte que la restriction de  $f$  à  $D_0$  au départ et  $f(D)$  à l'arrivée soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

#### Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes. Soient un groupe  $(G, \cdot)$  et deux sous-groupes  $H$  et  $K$  du groupe  $G$ . On note :

$$HK = \{h \cdot k, h \in H, k \in K\} \text{ et } KH = \{k \cdot h, h \in H, k \in K\}$$

$$\text{et } f : \begin{cases} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe  $G$  est commutatif.
- 2.(a) Soit  $x \in G$ . Montrer que :

$$x \in HK \iff x^{-1} \in KH.$$

- (b) Montrer que  $HK$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $KH$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $HK = KH$ .

**Définition et QC****Définition/ Explication : Complétez :**

- Si  $g$  et  $f$  sont surjectives alors ...
- Si  $g \circ f$  est surjective alors ...

**Démonstration :** Soient  $f$  un morphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$  et  $H'$  un sous-groupe de  $G'$ , alors  $f^{-1}(H')$  est un sous-groupe de  $G$ .**Exercice 1**

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, ]0, 1])$  définie par  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ . Montrer que  $f$  est bijective puis expliciter  $f([1, 2])$  et  $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$ .
2. On définit la relation  $\mathcal{R}$  binaire sur  $\mathbb{C}^2$  par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

- (a) Vérifier que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- (b) Déterminer les classes d'équivalence associées à cette relation.

**Exercice 2**Soit un anneau  $(A, +, \times)$  et deux éléments  $a, b$  de  $A$ . On dit qu'un élément  $a \in A$  est nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ .

1. Si  $(ab)$  est un élément nilpotent, montrer que  $1 - ab$  est inversible et déterminer  $(1 - ab)^{-1}$ .
2. Si  $(ab)$  et  $(ba)$  sont nilpotents, exprimer  $(1 - ba)^{-1}$  en fonction de  $(1 - ab)^{-1}$ .
3. On ne suppose plus  $(ab)$  ni  $(ba)$  nilpotents. Montrer que si  $1 - ab$  est inversible, alors  $1 - ba$  est également inversible.

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 14

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir les relations binaires, les relations réflexives et les relations symétriques.

**Démonstration :** Intersection de sous-groupes.

#### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  définie par  $f : x \mapsto x \sin(x)$ .  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?
2. Soient un ensemble  $E$  et une application injective  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ . On définit la relation  $\mathcal{R}$  binaire sur  $E$  par :

$$\forall (z, z') \in E^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow f(z) \leq f(z').$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre.

#### Exercice 2

Soit un anneau  $(A, +, \times)$ . On dit qu'un élément  $a \in A$  est nilpotent s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^n = 0$ .

1. Montrer que, si  $a$  est nilpotent, alors  $1 - a$  est inversible et calculer son inverse.
2. Soit un élément  $a \in A$ . On définit l'application  $u : \begin{cases} A & \rightarrow A \\ x & \rightarrow u(x) = ax - xa \end{cases}$ .  
Déterminer l'application  $u^p = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{p \text{ fois}}$ .
3. Montrer que, si  $a$  est nilpotent, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p$  soit l'application nulle.

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 15

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Image d'un segment et TVI

**Démonstration:** Énoncé et démonstration de la caractérisation séquentielle de la limite (démonstration dans le cas d'une limite en un réel et avec une limite finie).

### Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. Les fonctions  $x \mapsto \frac{x+4}{x^2+3x+2}$  et  $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+3x+2}$  sont-elles prolongeables par continuité en  $-2$  ?
2. Même question avec  $x \mapsto \frac{\sqrt{x^3-12x+17}-\sqrt{x^3-3x^2+5}}{x^2-4x+4}$  en  $2$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \right)$ .

### Exercice 2

On appelle  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en zéro telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

et  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en zéro et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos(x).$$

1. Montrer que, si  $f \in \mathcal{C}$ , alors  $f$  est une fonction constante.
2. Soit  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Montrer que  $\psi$ , le prolongement par continuité en zéro de  $\varphi$ , appartient à  $\mathcal{D}$ .
3. Soient  $f \in \mathcal{D}$ ,  $g_1 : \begin{cases} ]-\pi, \pi[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{\psi(x)} \end{cases}$  et  $g_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{\psi(x)} \end{cases}$ .
  - (a) Montrer que  $g_1$  est une fonction constante.
  - (b) En déduire qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que :  $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \lambda\psi(x)$ .
  - (c) À l'aide de la fonction  $g_2$ , expliciter  $\mathcal{D}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 15

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer le théorème de Rolle (et avec un dessin!) et inégalité des accroissements finis.

**Démonstration:** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . Montrer que, si  $f$  est injective et si  $f(a) < f(b)$  alors  $f$  est strictement croissante. On utilisera la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $\varphi : \lambda \mapsto f((1 - \lambda)b + \lambda y) - f((1 - \lambda)a + \lambda x)$  avec  $(x, y) \in [a, b]^2$  tel que  $x < y$ .

### Exercice 1

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2 + 1}{3x + 2} \right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$  puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x)))$  n'existe pas.

### Exercice 2

Pour tout  $m$  entier naturel, on appelle  $f_m$  la fonction suivante :  $f_m : x \mapsto x^m + x^2 + 2x - 1$ . Soit  $n$  un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif  $x_n$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Montrer les inégalités suivantes :  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ .
3. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.
4. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 15

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Fonctions lipschitziennes : définition, propriétés classiques ?  
**Démonstration:** Théorème des bornes atteintes.

### Exercice 1

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 9 - 6x} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sin(x))$

### Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- 1.(a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$ , on a :  $f(nx) = nf(x)$   
(b) Expliciter  $f(0)$ .  
(c) Étudier la parité de  $f$ .

2. En déduire l'existence d'un réel  $\alpha$  tel que :

- (a) pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $f(n) = n\alpha$ .  
(b) pour tout entier  $n$ , on a :  $f(n) = n\alpha$ .  
(c) pour tout rationnel  $x$ , on a :  $f(x) = x\alpha$ .

- 3.(a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Expliciter une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rationnels tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = x$ .

- (b) Déterminer  $f$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 15

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Dérivée d'une somme, produit, quotient et réciproque

**Démonstration :** Énoncé et démonstration de la caractérisation séquentielle de la limite (démonstration dans le cas d'une limite en un réel et avec une limite finie).

### Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. Les fonctions  $x \mapsto \frac{x+4}{x^2+3x+2}$  et  $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+3x+2}$  sont-elles prolongeables par continuité en  $-2$  ?
2. Même question avec  $x \mapsto \frac{\sqrt{x^3-12x+17}-\sqrt{x^3-3x^2+5}}{x^2-4x+4}$  en  $2$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \right)$ .

### Exercice 2

On appelle  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en zéro telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

et  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues en zéro et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x) \cos(x).$$

1. Montrer que, si  $f \in \mathcal{C}$ , alors  $f$  est une fonction constante.
2. Soit  $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . Montrer que  $\psi$ , le prolongement par continuité en zéro de  $\varphi$ , appartient à  $\mathcal{D}$ .
3. Soient  $f \in \mathcal{D}$ ,  $g_1 : \begin{cases} ]-\pi, \pi[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{\psi(x)} \end{cases}$  et  $g_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)}{\psi(x)} \end{cases}$ .
  - (a) Montrer que  $g_1$  est une fonction constante.
  - (b) En déduire qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que :  $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \lambda\psi(x)$ .
  - (c) À l'aide de la fonction  $g_2$ , expliciter  $\mathcal{D}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 15

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer le théorème des accroissements finis (et avec un dessin!) et inégalité des accroissements finis.

**Démonstration :** Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . Montrer que, si  $f$  est injective et si  $f(a) < f(b)$  alors  $f$  est strictement croissante. On utilisera la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0, 1]$  par :  $\varphi : \lambda \mapsto f((1 - \lambda)b + \lambda y) - f((1 - \lambda)a + \lambda x)$  avec  $(x, y) \in [a, b]^2$  tel que  $x < y$ .

### Exercice 1

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-x^2 + 1}{3x + 2} \right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$  puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos(\ln(x)))$  n'existe pas.

### Exercice 2

Pour tout  $m$  entier naturel, on appelle  $f_m$  la fonction suivante :  $f_m : x \mapsto x^m + x^2 + 2x - 1$ . Soit  $n$  un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un unique réel positif  $x_n$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ .
2. Montrer les inégalités suivantes :  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ .
3. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.
4. Montrer que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 15

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Formule de Leibniz

**Démonstration :** Théorème des bornes atteintes.

### Exercice 1

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 + x} \right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{-x^2 + x + 6}{x^2 + 9 - 6x} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sin(x))$

### Exercice 2

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1.(a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$ , on a :  $f(nx) = nf(x)$

(b) Expliciter  $f(0)$ .

(c) Étudier la parité de  $f$ .

2. En déduire l'existence d'un réel  $\alpha$  tel que :

(a) pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $f(n) = n\alpha$ .

(b) pour tout entier  $n$ , on a :  $f(n) = n\alpha$ .

(c) pour tout rationnel  $x$ , on a :  $f(x) = x\alpha$ .

3.(a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Expliciter une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de rationnels tels que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = x$ .

(b) Déterminer  $f$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 16

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir avec des quantificateurs  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 8563$  avec  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Démonstration:** Dérivée d'une réciproque.

#### Exercice 1

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e^x - e}{\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$  puis évaluer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec :

1.  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$

2.  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$

3.  $f : x \mapsto x \ln(1+x),$

#### Exercice 2

On définit  $f$  la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x - \ln(x)}{2} \end{cases}$  On note  $(E)$  l'équation suivante d'inconnue  $x$  réel strictement positif :  $\ln(x) + x = 0$ .  $(E)$

1. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution. Nous noterons  $\alpha$  cette solution.

2. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3. Montrer alors que, pour tous réels  $x$  et  $y$  de  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right) |x - y|$$

4. Établir la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer le théorème de minoration, majoration et de passage à la limite dans les inégalités.

**Démonstration:** Théorème de la limite de la dérivée.

### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . On prolonge  $f$  en posant  $f(0) = 0$ .

1. Prolonger  $f$  par continuité. On appelle encore  $f$  la fonction prolongée.
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en 0 et préciser sa position par rapport au graphe.
4. Factoriser  $f'$  afin d'en déduire le tableau de variations de  $f$ .

### Exercice 2

**Les deux questions sont indépendantes.**

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ , intervalle de réels, et dérivables en  $a$  (avec  $a \in I$ ). Calculer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right).$

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} \right).$

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n$  la fonction suivante définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

- (a) Montrer que  $f_n^{(n)}$  existe sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n.$$

(b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right).$

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Théorème de la limite monotone pour les fonctions

**Démonstration:** Théorème des accroissements finis.

### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$  et  $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  sans y être de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

- 1.(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

(b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \right)$ .

2. Pour tout  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(c, d)$  désignera le segment d'extrémités  $c$  et  $d$ . Soient  $f$  une fonction numérique dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $y \in (f'(a), f'(b))$ . On introduit les deux fonctions suivantes définies sur  $[a, b]$  :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

- (a) Soit  $z \in (f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$ . Montrer qu'il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $\varphi(t) = z$ .
- (b) En déduire qu'il existe  $u \in [a, b]$  tel que  $\varphi(u) = y$  ou  $\psi(u) = y$ .
- (c) Montrer que  $f'$  vérifie le TVI.
- (d) Est-ce étonnant ?

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 16

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir avec des quantificateurs  $\lim_{x \rightarrow 8563} (f(x)) = +\infty$  avec  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Démonstration :** Dérivée d'une réciproque.

#### Exercice 1

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e^x - e}{\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$  puis évaluer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec :

1.  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$

2.  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$

3.  $f : x \mapsto x \ln(1+x),$

#### Exercice 2

On définit  $f$  la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x - \ln(x)}{2} \end{cases}$  On note  $(E)$  l'équation suivante d'inconnue  $x$  réel strictement positif :  $\ln(x) + x = 0$ .  $(E)$

1. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution. Nous noterons  $\alpha$  cette solution.

2. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3. Montrer alors que, pour tous réels  $x$  et  $y$  de  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right) |x - y|$$

4. Établir la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer le théorème de minoration, majoration et d'encadrement.

**Démonstration :** Théorème de la limite de la dérivée.

### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . On prolonge  $f$  en posant  $f(0) = 0$ .

1. Prolonger  $f$  par continuité. On appelle encore  $f$  la fonction prolongée.
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en 0 et préciser sa position par rapport au graphe.
4. Factoriser  $f'$  afin d'en déduire le tableau de variations de  $f$ .

### Exercice 2

**Les deux questions sont indépendantes.**

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ , intervalle de réels, et dérivables en  $a$  (avec  $a \in I$ ). Calculer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right).$

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} \right).$

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n$  la fonction suivante définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

- (a) Montrer que  $f_n^{(n)}$  existe sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n.$$

(b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right).$

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Expliquer ce qu'est le prolongement par continuité

**Démonstration :** Théorème des accroissements finis.

### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$  et  $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  sans y être de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

- 1.(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

(b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \right)$ .

2. Pour tout  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(c, d)$  désignera le segment d'extrémités  $c$  et  $d$ . Soient  $f$  une fonction numérique dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $y \in (f'(a), f'(b))$ . On introduit les deux fonctions suivantes définies sur  $[a, b]$  :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

- (a) Soit  $z \in (f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$ . Montrer qu'il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $\varphi(t) = z$ .
- (b) En déduire qu'il existe  $u \in [a, b]$  tel que  $\varphi(u) = y$  ou  $\psi(u) = y$ .
- (c) Montrer que  $f'$  vérifie le TVI.
- (d) Est-ce étonnant ?

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 16

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir avec des quantificateurs  $\lim_{x \rightarrow 8563} (f(x)) = +\infty$  avec  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Démonstration :** Dérivée d'une réciproque.

#### Exercice 1

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e^x - e}{\arctan(x) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \right)$  puis évaluer  $f^{(n)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec :

1.  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x},$

2.  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2},$

3.  $f : x \mapsto x \ln(1+x),$

#### Exercice 2

On définit  $f$  la fonction suivante :  $f : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x - \ln(x)}{2} \end{cases}$  On note  $(E)$  l'équation suivante d'inconnue  $x$  réel strictement positif :  $\ln(x) + x = 0$ .  $(E)$

1. Montrer que  $(E)$  admet une unique solution. Nous noterons  $\alpha$  cette solution.

2. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

3. Montrer alors que, pour tous réels  $x$  et  $y$  de  $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right) |x - y|$$

4. Établir la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer le théorème de minoration, majoration et d'encadrement.

**Démonstration :** Théorème de la limite de la dérivée.

### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} -e^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ . On prolonge  $f$  en posant  $f(0) = 0$ .

1. Prolonger  $f$  par continuité. On appelle encore  $f$  la fonction prolongée.
2. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Donner l'équation de la tangente au graphe de  $f$  en 0 et préciser sa position par rapport au graphe.
4. Factoriser  $f'$  afin d'en déduire le tableau de variations de  $f$ .

### Exercice 2

**Les deux questions sont indépendantes.**

1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $I$ , intervalle de réels, et dérivables en  $a$  (avec  $a \in I$ ). Calculer les limites suivantes :

(a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h} \right).$

(b)  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a} \right).$

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n$  la fonction suivante définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  définie par :

$$f_n : x \mapsto x^n \ln(x).$$

- (a) Montrer que  $f_n^{(n)}$  existe sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \ln(x) + a_n.$$

(b) En déduire que  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \right).$

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 16

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Expliquer ce qu'est le prolongement par continuité

**Démonstration :** Théorème des accroissements finis.

### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$  et  $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  sans y être de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

- 1.(a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

(b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \right)$ .

2. Pour tout  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(c, d)$  désignera le segment d'extrémités  $c$  et  $d$ . Soient  $f$  une fonction numérique dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $y \in (f'(a), f'(b))$ . On introduit les deux fonctions suivantes définies sur  $[a, b]$  :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}.$$

- (a) Soit  $z \in (f'(a), \frac{f(b)-f(a)}{b-a})$ . Montrer qu'il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $\varphi(t) = z$ .
- (b) En déduire qu'il existe  $u \in [a, b]$  tel que  $\varphi(u) = y$  ou  $\psi(u) = y$ .
- (c) Montrer que  $f'$  vérifie le TVI.
- (d) Est-ce étonnant ?

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer le théorème de la division euclidienne.

**Démonstration:** Degré du produit de polynômes, majoration du degré de la somme de polynômes.

### Exercice 1

1. On pose  $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$  (avec  $n$  un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de  $P$  et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de  $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$  et  $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$  sachant qu'ils possèdent une racine commune.
3. Décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^4 - 1}$ .

### Exercice 2

Soit  $P$  un polynôme de degré 2025 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2025 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de  $P(2026)$ . Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de  $Q$ .
2. Déterminer toutes les racines de  $Q$ .
3. Calculer  $Q(-1)$ .
4. En déduire la factorisation de  $Q$ .
5. Calculer  $Q(2026)$  puis  $P(2026)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition PPCM, PGCD, lien entre les deux ?

**Démonstration:** Unicité (en cas d'existence) de la division euclidienne.

### Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de  $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$  ?
2. Déterminer le réel  $a$  pour que  $-1$  soit racine double de  $X^5 + aX^2 + aX + 1$ .
3. Décomposition en éléments simples de  $\frac{X^2 + 3X + 1}{X^3 - 4X^2 + 5X - 2}$ .

### Exercice 2

On définit une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes en posant  $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant et la parité de  $T_n$ .
2. Déterminer la parité de  $T_n$ .
3. Montrer que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .
4. En déduire toutes les racines de  $T_n$ .
5. Trouver toutes les racines de  $T'_n$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** relation de Bézout, couple de Bézout ?

**Démonstration:** Soit  $(P, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$ , montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \mid P.$$

### Exercice 1

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$P_n(X) = X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1 \quad \text{et} \quad A(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

2. En déduire que  $P_n$  est divisible par  $A$ .

3. Effectuer la division euclidienne de  $P_n$  est divisible par  $A$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Trouver  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} a^{2(n-k)} (-1)^k b^{2k+1}.$$

2. On pose  $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ . En déduire un polynôme  $P_n$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, P_n(\cotan^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}}.$$

3. Donner les racines de  $P_n$ .

4. En déduire que  $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Lien entre division euclidienne et PGCD.

**Démonstration :** Degré du produit de polynômes, majoration du degré de la somme de polynômes.

### Exercice 1

1. On pose  $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$  (avec  $n$  un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de  $P$  et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de  $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$  et  $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$  sachant qu'ils possèdent une racine commune.
3. Décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^4 - 1}$ .

### Exercice 2

Soit  $P$  un polynôme de degré 2025 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2025 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de  $P(2026)$ . Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de  $Q$ .
2. Déterminer toutes les racines de  $Q$ .
3. Calculer  $Q(-1)$ .
4. En déduire la factorisation de  $Q$ .
5. Calculer  $Q(2026)$  puis  $P(2026)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Théorème D'Euclide et algorithme d'Euclide

**Démonstration :** Unicité (en cas d'existence) de la division euclidienne.

### Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de  $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$  ?
2. Déterminer le réel  $a$  pour que  $-1$  soit racine double de  $X^5 + aX^2 + aX + 1$ .
3. Décomposition en éléments simples de  $\frac{X^2 + 3X + 1}{X^3 - 4X^2 + 5X - 2}$ .

### Exercice 2

On définit une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes en posant  $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant et la parité de  $T_n$ .
2. Déterminer la parité de  $T_n$ .
3. Montrer que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .
4. En déduire toutes les racines de  $T_n$ .
5. Trouver toutes les racines de  $T'_n$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Polynômes irréductibles : définition? Description dans  $\mathbb{C}[X]$ , Description dans  $\mathbb{R}[X]$ ?

**Démonstration :** Soit  $(P, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$ , montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \mid P.$$

### Exercice 1

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$P_n(X) = X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1 \text{ et } A(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

2. En déduire que  $P_n$  est divisible par  $A$ .

3. Effectuer la division euclidienne de  $P_n$  est divisible par  $A$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Trouver  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} a^{2(n-k)} (-1)^k b^{2k+1}.$$

2. On pose  $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ . En déduire un polynôme  $P_n$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, P_n(\cotan^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}}.$$

3. Donner les racines de  $P_n$ .

4. En déduire que  $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 17

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Lien entre division euclidienne et PGCD.

**Démonstration :** Degré du produit de polynômes, majoration du degré de la somme de polynômes.

### Exercice 1

1. On pose  $P(X) = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$  (avec  $n$  un entier supérieur à 3). Montrer que 1 est racine de  $P$  et évaluer son ordre de multiplicité.
2. Trouver les racines de  $Q(X) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$  et  $R(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$  sachant qu'ils possèdent une racine commune.
3. Décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{X^4 - 1}$ .

### Exercice 2

Soit  $P$  un polynôme de degré 2025 vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2025 \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}.$$

On cherche à calculer ici la valeur de  $P(2026)$ . Pour cela, on pose :

$$Q(X) = (X+1) \times P(X) - X.$$

1. Déterminer le degré de  $Q$ .
2. Déterminer toutes les racines de  $Q$ .
3. Calculer  $Q(-1)$ .
4. En déduire la factorisation de  $Q$ .
5. Calculer  $Q(2026)$  puis  $P(2026)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Théorème D'Euclide et algorithme d'Euclide

**Démonstration :** Unicité (en cas d'existence) de la division euclidienne.

### Exercice 1

1. Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de  $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$  ?
2. Déterminer le réel  $a$  pour que  $-1$  soit racine double de  $X^5 + aX^2 + aX + 1$ .
3. Décomposition en éléments simples de  $\frac{X^2 + 3X + 1}{X^3 - 4X^2 + 5X - 2}$ .

### Exercice 2

On définit une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes en posant  $T_0(X) = 1, T_1(X) = X$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant et la parité de  $T_n$ .
2. Déterminer la parité de  $T_n$ .
3. Montrer que :  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ .
4. En déduire toutes les racines de  $T_n$ .
5. Trouver toutes les racines de  $T'_n$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 17

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Polynômes irréductibles : définition? Description dans  $\mathbb{C}[X]$ , Description dans  $\mathbb{R}[X]$ ?

**Démonstration :** Soit  $(P, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}$ , montrer que :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X - \alpha) \mid P.$$

### Exercice 1

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$P_n(X) = X^{n+1} \cos((n-1)\theta) - X^n \cos(n\theta) - X \cos(\theta) + 1 \quad \text{et} \quad A(X) = X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(X) = \cos((n-1)\theta)X^{n-1}A(X) + P_{n-1}(X).$$

2. En déduire que  $P_n$  est divisible par  $A$ .

3. Effectuer la division euclidienne de  $P_n$  est divisible par  $A$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Trouver  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} a^{2(n-k)} (-1)^k b^{2k+1}.$$

2. On pose  $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$ . En déduire un polynôme  $P_n$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, P_n(\cotan^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}}.$$

3. Donner les racines de  $P_n$ .

4. En déduire que  $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 18

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Racine et divisibilité? Racine multiple et divisibilité?

**Démonstration:**  $(PQ)'$  et  $(P \circ Q)'$  avec  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ .

### Exercice 1

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .
2. Déterminer les racines du polynôme  $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$  en sachant qu'il y a une racine évidente multiple.
3. Déterminer le PGCD de  $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$  et  $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Question indépendante : Factoriser  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Factoriser  $X^n - 1$ .
3. Factoriser  $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ .
4. Calculer  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .
5. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Degré et opération (somme, produit, composée, dérivation) ?

**Démonstration:** Factorisation d'un polynôme ayant des racines distinctes et en déduire ce qu'on peut dire de  $P$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$  admettant  $n + 1$  racines distinctes deux à deux.

**Exercice 1**

Soient  $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$  et  $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$ .

1. Montrer que  $P$  et  $Q$  ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de  $P$ , puis comme racine de  $Q$ .
2. Factoriser  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .  $Q$  divise-t-il  $P$ ?
3. Soit  $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ . Montrer que  $1 + X + X^2$  divise  $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ .

**Exercice 2**

1. Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X) = XP'(X)$ .
2. Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X) = P(X + 1)$ .
3. Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :  $(X^2 + 1)P(X) = P(X^2)$ .
4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$ .
  - (a) Soit  $z \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . Montrer qu'il existe une racine de  $P$  de module supérieur strictement supérieur à  $|z|$ .
  - (b) Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Décomposition en facteurs irréductibles ?

**Démonstration:** Caractérisation de l'ordre des multiplicités des racines.

### Exercice 1

1. Factoriser  $1 + X + X^2 + X^3$  et  $X^6 - 1$ .
2. On suppose que  $P$ , un polynôme à coefficient réel, est périodique de période  $T$  avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose :

$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Montrer que  $Q$  est le polynôme nul et en déduire que  $P$  est constant

### Exercice 2

1. Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$  tel que  $P(X^2) = Q(X^2)$ . Montrer que  $P = Q$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme  $T$ -périodique (avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ). Montrer que  $P$  est constant.
3. Trouver un polynôme  $P$  tel que  $P(X + 1) - P(X) = X^2$ .
4. En déduire la valeur de  $\sum_{i=1}^n i^2$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. Reproduire cette méthode pour expliciter  $\sum_{i=1}^n i^3, \sum_{i=1}^n i^4 \dots$

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer diverses caractérisations du polynôme nul.

**Démonstration :**  $(PQ)'$  et  $(P \circ Q)'$  avec  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ .

### Exercice 1

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .
2. Déterminer les racines du polynôme  $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$  en sachant qu'il y a une racine évidente multiple.
3. Déterminer le PGCD de  $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$  et  $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Question indépendante : Factoriser  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Factoriser  $X^n - 1$ .
3. Factoriser  $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ .
4. Calculer  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .
5. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 18

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Formule de Taylor

**Démonstration :** Factorisation d'un polynôme ayant des racines distinctes et en déduire ce qu'on peut dire de  $P$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$  admettant  $n + 1$  racines distinctes deux à deux.

### Exercice 1

Soient  $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$  et  $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$ .

1. Montrer que  $P$  et  $Q$  ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de  $P$ , puis comme racine de  $Q$ .
2. Factoriser  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .  $Q$  divise-t-il  $P$ ?
3. Soit  $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ . Montrer que  $1 + X + X^2$  divise  $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ .

### Exercice 2

1. Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X) = XP'(X)$ .
2. Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X) = P(X + 1)$ .
3. Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :  $(X^2 + 1)P(X) = P(X^2)$ .
4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$ .
  - (a) Soit  $z \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . Montrer qu'il existe une racine de  $P$  de module supérieur strictement supérieur à  $|z|$ .
  - (b) Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Expliquer la décomposition en éléments simples.

**Démonstration :** Caractérisation de l'ordre des multiplicités des racines.

#### Exercice 1

1. Factoriser  $1 + X + X^2 + X^3$  et  $X^6 - 1$ .
2. On suppose que  $P$ , un polynôme à coefficient réel, est périodique de période  $T$  avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose :

$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Montrer que  $Q$  est le polynôme nul et en déduire que  $P$  est constant

#### Exercice 2

1. Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$  tel que  $P(X^2) = Q(X^2)$ . Montrer que  $P = Q$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme  $T$ -périodique (avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ). Montrer que  $P$  est constant.
3. Trouver un polynôme  $P$  tel que  $P(X + 1) - P(X) = X^2$ .
4. En déduire la valeur de  $\sum_{i=1}^n i^2$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. Reproduire cette méthode pour expliciter  $\sum_{i=1}^n i^3, \sum_{i=1}^n i^4 \dots$

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer diverses caractérisations du polynôme nul.

**Démonstration :**  $(PQ)'$  et  $(P \circ Q)'$  avec  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ .

### Exercice 1

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$  est divisible par  $X^2 - X + 1$ .
2. Déterminer les racines du polynôme  $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$  en sachant qu'il y a une racine évidente multiple.
3. Déterminer le PGCD de  $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2X - 1$  et  $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Question indépendante : Factoriser  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
2. Factoriser  $X^n - 1$ .
3. Factoriser  $1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1}$ .
4. Calculer  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .
5. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 18

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Formule de Taylor

**Démonstration :** Factorisation d'un polynôme ayant des racines distinctes et en déduire ce qu'on peut dire de  $P$  dans  $\mathbb{K}_n[X]$  admettant  $n + 1$  racines distinctes deux à deux.

### Exercice 1

Soient  $P = X^5 - X^4 - 6X^3 + 14X^2 - 11X + 3$  et  $Q = X^3 - 7X^2 + 11X - 5$ .

1. Montrer que  $P$  et  $Q$  ont une racine évidente en commun et déterminer son ordre de multiplicité comme racine de  $P$ , puis comme racine de  $Q$ .
2. Factoriser  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .  $Q$  divise-t-il  $P$ ?
3. Soit  $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$ . Montrer que  $1 + X + X^2$  divise  $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ .

### Exercice 2

1. Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X) = XP'(X)$ .
2. Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X) = P(X + 1)$ .
3. Trouver tous les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que :  $(X^2 + 1)P(X) = P(X^2)$ .
4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que :  $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$ .
  - (a) Soit  $z \in \mathbb{C}$  une racine de  $P$ . Montrer qu'il existe une racine de  $P$  de module supérieur strictement supérieur à  $|z|$ .
  - (b) Déterminer tous les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant que :  $P(X^2) = P(X - 1)P(X + 1)$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 18

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Expliquer la décomposition en éléments simples.

**Démonstration :** Caractérisation de l'ordre des multiplicités des racines.

### Exercice 1

1. Factoriser  $1 + X + X^2 + X^3$  et  $X^6 - 1$ .
2. On suppose que  $P$ , un polynôme à coefficient réel, est périodique de période  $T$  avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . On pose :

$$Q(X) = P(X) - P(0).$$

Montrer que  $Q$  est le polynôme nul et en déduire que  $P$  est constant

### Exercice 2

1. Soit  $(P, Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$  tel que  $P(X^2) = Q(X^2)$ . Montrer que  $P = Q$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme  $T$ -périodique (avec  $T \in \mathbb{R}_+^*$ ). Montrer que  $P$  est constant.
3. Trouver un polynôme  $P$  tel que  $P(X + 1) - P(X) = X^2$ .
4. En déduire la valeur de  $\sum_{i=1}^n i^2$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. Reproduire cette méthode pour expliciter  $\sum_{i=1}^n i^3, \sum_{i=1}^n i^4 \dots$

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Compléter sans justifier :

- Si  $w_n = o_{+\infty}(u_n)$  et  $z_n = O_{+\infty}(v_n)$  alors ...
- Si  $w_n = o_{+\infty}(u_n)$  et  $u_n = O_{+\infty}(v_n)$  alors ...
- Si  $w_n = O_{+\infty}(u_n)$  et  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  alors ...
- Si  $w_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$  et  $u_n = o_{+\infty}(v_n)$  alors ...

**Démonstration:** Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto \arctan(x)$ .

#### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ .

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $f$ .
3. Montrer que l'on peut prolonger  $f$  en une fonction dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0 à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ .
4. Préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de  $C_f$ .

#### Exercice 2

Soit  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ .

1. Donner le tableau de variations de  $f$ .
2. Trouver les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner les équations des asymptotes de  $f$  ainsi que la position de ces asymptotes par rapport à la courbe représentative  $C_f$  de  $f$ .
4. Quelle est la tangente en 0 à  $C_f$  ?

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,  $\cos$  et  $\arctan$ .

**Démonstration:** Montrer que le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

#### Exercice 1

1. Trouver un équivalent en 0 de  $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{ch} \left( \frac{1}{x} \right)^{x^2} \right)$ .
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{3/x^2}$ .

#### Exercice 2

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .
3. Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp \left( \frac{x-1}{x+1} \right).$$

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Énoncer le théorème de Taylor-Young.

**Démonstration:** Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  et  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .

### Exercice 1

1. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n^3 - \ln(n) + 1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n! + e^n}{3^n + 2^n}.$$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ .
3. Soit  $f$  une fonction telle que  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ . Donner l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.

### Exercice 2

On pose  $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x} - e^x)$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et établir :  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ . Qu'en déduire ?
2. Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  et étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
- 3.(a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\ln(2), +\infty[$  sur un intervalle ouvert  $J$  que l'on précisera (on remarquera que  $0 \in J$ ). On admet dans ce cas que la bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow ]-\ln(2), +\infty[$  est encore de classe  $C^\infty$ . Montrer qu'il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :  $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$ .  
(b) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ .  
(c) Donner une autre expression du développement limité de  $x \mapsto f^{-1}(f(x))$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .  
(d) Conclure que  $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + o_0(x^3)$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Exposer la méthode pour obtenir les DL en  $a$  et en l'infini.

**Démonstration :** Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto \arctan(x)$ .

#### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ .

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $f$ .
3. Montrer que l'on peut prolonger  $f$  en une fonction dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0 à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ .
4. Préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de  $C_f$ .

#### Exercice 2

Soit  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ .

1. Donner le tableau de variations de  $f$ .
2. Trouver les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner les équations des asymptotes de  $f$  ainsi que la position de ces asymptotes par rapport à la courbe représentative  $C_f$  de  $f$ .
4. Quelle est la tangente en 0 à  $C_f$  ?

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $x \mapsto \sqrt{1+x}$ ,  $\text{ch}$  et  $\tan$ .

**Démonstration :** Montrer que le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

#### Exercice 1

1. Trouver un équivalent en 0 de  $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \text{ch} \left( \frac{1}{x} \right)^{x^2} \right)$ .
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{3/x^2}$ .

#### Exercice 2

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .
3. Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp \left( \frac{x-1}{x+1} \right).$$

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $\arctan$ ,  $\sin$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

**Démonstration :** Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  et  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .

### Exercice 1

1. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n^3 - \ln(n) + 1} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n! + e^n}{3^n + 2^n}.$$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ .

3. Soit  $f$  une fonction telle que  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ . Donner l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.

### Exercice 2

On pose  $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x} - e^x)$ .

- Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et établir :  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ . Qu'en déduire ?
- Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  et étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
- (a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\ln(2), +\infty[$  sur un intervalle ouvert  $J$  que l'on précisera (on remarquera que  $0 \in J$ ). On admet dans ce cas que la bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow ]-\ln(2), +\infty[$  est encore de classe  $C^\infty$ . Montrer qu'il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :  $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$ .  
(b) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ .  
(c) Donner une autre expression du développement limité de  $x \mapsto f^{-1}(f(x))$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .  
(d) Conclure que  $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + o_0(x^3)$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Exposer la méthode pour obtenir les DL en  $a$  et en l'infini.

**Démonstration :** Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 de  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto \arctan(x)$ .

#### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ .

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .
2. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $f$ .
3. Montrer que l'on peut prolonger  $f$  en une fonction dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0 à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ .
4. Préciser la position de la tangente en 0 vis-à-vis de  $C_f$ .

#### Exercice 2

Soit  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}$ .

1. Donner le tableau de variations de  $f$ .
2. Trouver les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. Donner les équations des asymptotes de  $f$  ainsi que la position de ces asymptotes par rapport à la courbe représentative  $C_f$  de  $f$ .
4. Quelle est la tangente en 0 à  $C_f$  ?

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 19

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $x \mapsto \sqrt{1+x}$ ,  $\text{ch}$  et  $\tan$ .

**Démonstration :** Montrer que le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 d'une fonction paire (resp. impaire) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

#### Exercice 1

1. Trouver un équivalent en 0 de  $x \mapsto \ln(\text{ch}(x))$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( \text{ch} \left( \frac{1}{x} \right) \right)^{x^2} \right)$ .
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ .
4. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $x \mapsto \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^{3/x^2}$ .

#### Exercice 2

1. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ .
3. Mener une étude complète (notamment asymptotes et position par rapport à l'asymptote) et représenter graphiquement la fonction suivante :

$$g : x \mapsto x \exp \left( \frac{x-1}{x+1} \right).$$

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 19

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Donner le développement limité à l'ordre 3 de  $\arctan$ ,  $\sin$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

**Démonstration :** Démontrer la formule donnant le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  et  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ .

### Exercice 1

1. Trouver un équivalent simple aux suites suivantes et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{2n^3 - \ln(n) + 1} \text{ et } v_n = \frac{n! + e^n}{3^n + 2^n}.$$

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ .

3. Soit  $f$  une fonction telle que  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ . Donner l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.

### Exercice 2

On pose  $f : x \mapsto \ln(1 + e^{2x} - e^x)$ .

1. Montrer que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et établir :  $f(x) = x + x^2 + o_0(x^3)$ . Qu'en déduire ?
2. Montrer que la droite d'équation  $y = 2x$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $+\infty$  et étudier la position de la courbe de  $f$  par rapport à cette asymptote pour les abscisses positives.
- 3.(a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\ln(2), +\infty[$  sur un intervalle ouvert  $J$  que l'on précisera (on remarquera que  $0 \in J$ ). On admet dans ce cas que la bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow ]-\ln(2), +\infty[$  est encore de classe  $C^\infty$ . Montrer qu'il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  tel que :  $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o_0(x^3)$ .  
(b) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ .  
(c) Donner une autre expression du développement limité de  $x \mapsto f^{-1}(f(x))$  en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ .  
(d) Conclure que  $f^{-1}(x) = x - x^2 + 2x^3 + o_0(x^3)$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition des suites équivalentes, équivalents et opérations.  
**Démonstration:** Développement limité et tangente (en particulier position par rapport à la tangente).

#### Exercice 1

On pose  $f : x \mapsto \left( \frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))} \right)$ .

1. On admet que :  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ . En déduire l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.
2. Établir :  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ .

#### Exercice 2

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

1. Étudier  $f : x \mapsto x \exp(-x)$  et déterminer le signe de  $x \mapsto f(x) - x$ .
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et déterminer sa limite.
3. On suppose désormais  $a > 0$ . Trouver  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  ait une limite finie non nulle.
4. En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 20

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition du grand o, grand o et opérations.

**Démonstration:** Développement limité et asymptote (en particulier position par rapport à l'asymptote).

#### Exercice 1

On pose  $f : x \mapsto \left( \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} \right)$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$ .

2. On admet que :  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$ . En déduire l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.

3. Établir :  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$ .

#### Exercice 2

Ces trois questions sont indépendantes.

1.(a) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$ .

(b) En déduire le développement limité d'ordre 3 en 2 de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

2. Soit  $g : x \mapsto x^2 \ln(x)$ .

(a) Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0 et que cette fonction est dérivable en 0. On note encore  $g$  son prolongement.

(b) Montrer que  $g$  n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

3. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) + (f(-x))}{x^2} \right)$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer la formule de Stirling puis la proposition sur équivalent et composition avec  $\ln$ .

**Démonstration:** Obtention d'un équivalent à partir d'un développement limité, obtention d'un signe à partir d'un équivalent.

#### Exercice 1

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \right)$ .
2. Trouver un équivalent en 0 de  $\sin - \tan$ .
3. Trouver un équivalent simple aux suites et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \text{ et } v_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}.$$

#### Exercice 2

On pose  $g : x \mapsto \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)^{1/x}$  et  $\varphi : x \mapsto 2x \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)$ .

1. Étudier le signe de  $\varphi$ .
2. Établir :  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{8} - \frac{x^3}{192} + o_0(x^3)$  avec  $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)$ .
3. En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de  $g$ .
4. En déduire l'équation de la tangente à  $C_g$ , la courbe représentative de  $g$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_g$  par rapport à cette tangente.
5. Donner l'équation de l'asymptote à  $C_g$  en  $+\infty$  et la position par rapport à l'asymptote.

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition des suites équivalentes, équivalents et opérations.  
**Démonstration:** Développement limité et tangente (en particulier position par rapport à la tangente).

#### Exercice 1

On pose  $f : x \mapsto \left( \frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))} \right)$ .

1. On admet que :  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ . En déduire l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.
2. Établir :  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ .

#### Exercice 2

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

1. Étudier  $f : x \mapsto x \exp(-x)$  et déterminer le signe de  $x \mapsto f(x) - x$ .
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et déterminer sa limite.
3. On suppose désormais  $a > 0$ . Trouver  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  ait une limite finie non nulle.
4. En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 20

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définition du grand o, grand o et opérations.

**Démonstration:** Développement limité et asymptote (en particulier position par rapport à l'asymptote).

#### Exercice 1

On pose  $f : x \mapsto \left( \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} \right)$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$ .

2. On admet que :  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$ . En déduire l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.

3. Établir :  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$ .

#### Exercice 2

Ces trois questions sont indépendantes.

1.(a) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$ .

(b) En déduire le développement limité d'ordre 3 en 2 de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

2. Soit  $g : x \mapsto x^2 \ln(x)$ .

(a) Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0 et que cette fonction est dérivable en 0. On note encore  $g$  son prolongement.

(b) Montrer que  $g$  n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

3. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) + (f(-x))}{x^2} \right)$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer la formule de Stirling puis la proposition sur équivalent et composition avec  $\ln$ .

**Démonstration:** Obtention d'un équivalent à partir d'un développement limité, obtention d'un signe à partir d'un équivalent.

#### Exercice 1

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \right)$ .
2. Trouver un équivalent en 0 de  $\sin - \tan$ .
3. Trouver un équivalent simple aux suites et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \text{ et } v_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}.$$

#### Exercice 2

On pose  $g : x \mapsto \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)^{1/x}$  et  $\varphi : x \mapsto 2x \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)$ .

1. Étudier le signe de  $\varphi$ .
2. Établir :  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{8} - \frac{x^3}{192} + o_0(x^3)$  avec  $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)$ .
3. En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de  $g$ .
4. En déduire l'équation de la tangente à  $C_g$ , la courbe représentative de  $g$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_g$  par rapport à cette tangente.
5. Donner l'équation de l'asymptote à  $C_g$  en  $+\infty$  et la position par rapport à l'asymptote.

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définition du petit o, petit o et opérations.

**Démonstration :** Développement limité et tangente (en particulier position par rapport à la tangente).

#### Exercice 1

On pose  $f : x \mapsto \left( \frac{2}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\ln(\cos(x))} \right)$ .

1. On admet que :  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ . En déduire l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.
2. Établir :  $f(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + o_0(x^2)$ .

#### Exercice 2

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

1. Étudier  $f : x \mapsto x \exp(-x)$  et déterminer le signe de  $x \mapsto f(x) - x$ .
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et déterminer sa limite.
3. On suppose désormais  $a > 0$ . Trouver  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  ait une limite finie non nulle.
4. En déduire un équivalent de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 20

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer 6 équivalents classiques.

**Démonstration :** Développement limité et asymptote (en particulier position par rapport à l'asymptote).

#### Exercice 1

On pose  $f : x \mapsto \left( \frac{1 - \cos(x)}{\tan^2(x)} \right)$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))$ .

2. On admet que :  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$ . En déduire l'équation de la tangente à  $C_f$ , la courbe représentative de  $f$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_f$  par rapport à cette tangente.

3. Établir :  $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x^2}{8} + o_0(x^2)$ .

#### Exercice 2

Ces trois questions sont indépendantes.

1.(a) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}$ .

(b) En déduire le développement limité d'ordre 3 en 2 de  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

2. Soit  $g : x \mapsto x^2 \ln(x)$ .

(a) Montrer que  $g$  se prolonge par continuité en 0 et que cette fonction est dérivable en 0. On note encore  $g$  son prolongement.

(b) Montrer que  $g$  n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

3. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$ . Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) + (f(-x))}{x^2} \right)$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 20

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer les croissances comparées en utilisant les notations de Landau.

**Démonstration :** Obtention d'un équivalent à partir d'un développement limité, obtention d'un signe à partir d'un équivalent.

#### Exercice 1

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x - \sin(x))}{\sqrt{1+x^3} - 1} \right)$ .
2. Trouver un équivalent en 0 de  $\sin - \tan$ .
3. Trouver un équivalent simple aux suites et en déduire leur limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \text{ et } v_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}.$$

#### Exercice 2

On pose  $g : x \mapsto \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)^{1/x}$  et  $\varphi : x \mapsto 2x \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)$ .

1. Étudier le signe de  $\varphi$ .
2. Établir :  $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{8} - \frac{x^3}{192} + o_0(x^3)$  avec  $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln \left( \frac{e^x + 1}{2} \right)$ .
3. En déduire le développement limité d'ordre 2 en 0 de  $g$ .
4. En déduire l'équation de la tangente à  $C_g$ , la courbe représentative de  $g$ , au point d'abscisse 0. Étudier la position de  $C_g$  par rapport à cette tangente.
5. Donner l'équation de l'asymptote à  $C_g$  en  $+\infty$  et la position par rapport à l'asymptote.

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Donner la définition du rang d'une famille et donner la lien avec famille libre, génératrice.

**Démonstration:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que, pour tout  $(u, a) \in E \times \mathbb{K}$ , on a :

- $a \cdot 0_E = 0_E$  et  $0 \cdot u = 0_E$ .
- $a \cdot u = 0_E \iff u = 0_E$  ou  $a = 0$ .

### Exercice 1

Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère l'ensemble  $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$  et :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On appelle  $\mathcal{B}$  la famille  $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .

1. Montrer que  $G$  est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de  $F$  et  $G$ .
3. Expliciter  $F \cap G$ .
4. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$  et en déduire que  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ .

### Exercice 2

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi  $\binom{X}{0} = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la famille  $\left(\binom{X}{0}, \dots, \binom{X}{n}\right)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Décomposez  $P$  sur la base de la question précédente.
3. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$ .
4. Question indépendante : Montrer que  $E = F \oplus G$  avec  $E$  l'ensemble des suites réelles convergentes,  $F$  l'ensemble des suites réelles de limite nulle et  $G$  l'ensemble des suites réelles constantes.

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Donner la définition d'un sous-espace affine et d'un sous-espace vectoriel.

**Démonstration:** Soit  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Montrer que cette famille est libre.

**Exercice 1**

1. Montrer que la famille  $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 2X - 1, 2X^2 + X + 3, X^2 + 4X - 9)$  est liée.
2. Calculer la dimension de  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .
3. A-t-on  $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  ?
4. Soit  $P = aX^2 + bX + c$  un élément de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $P$  appartienne à  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .
5. Trouver un supplémentaire de  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 2**

Soit  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^4$  et  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels de  $E$  suivants :  $G = \{(a + b, a + b, 2b, a - b); (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$  et :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tel que } \begin{cases} x - y + iz - t = 0 \\ ix + y + z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

On note  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_1, \vec{g}_2$  les vecteurs de  $E$  définis ci-dessous :  $\vec{f}_1 = (1, i, -1, -2i + 1)$ ,  $\vec{f}_2 = (-i, -2 - i, i, 1)$ ,  $\vec{g}_1 = (1, 1, 4, -3)$ ,  $\vec{g}_2 = (6, 6, 4, 2)$ .

1. Déterminer une base et la dimension de  $F$  et  $G$ .
2. Justifier que  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$  est une base de  $F$  et  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$  une base de  $G$ .
3. Montrer que  $E = F \oplus G$ .
4. Question indépendante : Soient  $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$  et  $B = \{ \text{Applications constantes de } [0, 1] \text{ dans } \mathbb{R} \}$ . Démontrer que  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = A \oplus B$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Donner 4 différentes caractérisations des sous-espaces supplémentaires en dimension finie.

**Démonstration:** Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

### Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base et la dimension de  $\mathcal{C}$ .
3. Expliciter un supplémentaire de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

### Exercice 2

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$  où

$$\mathcal{F} = ((2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 0, 2, 1))$$

et  $G = \{(x, y, z, t) \in E, 2x + 3y - 4z - t = 0\}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est libre. En déduire la dimension de  $F$ .
2. Trouver une équation cartésienne de  $F$ .
- 3.(a) Soit  $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ . Vérifier que  $\vec{u} \in F \cap G$ .  
(b) Déterminer une base de  $F \cap G$ .
4. En déduire une base de  $E$  formée de  $\vec{u}$ , d'un autre vecteur de  $F \cap G$ , d'un vecteur de  $G$  et d'un dernier vecteur de  $E$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Que peut-on dire de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels ? de l'union ?

**Démonstration :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que, pour tout  $(u, a) \in E \times \mathbb{K}$ , on a :

- $a \cdot 0_E = 0_E$  et  $0 \cdot u = 0_E$ .
- $a \cdot u = 0_E \iff u = 0_E$  ou  $a = 0$ .

### Exercice 1

Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère l'ensemble  $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$  et :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On appelle  $\mathcal{B}$  la famille  $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .

1. Montrer que  $G$  est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de  $F$  et  $G$ .
3. Expliciter  $F \cap G$ .
4. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$  et en déduire que  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ .

### Exercice 2

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi  $\binom{X}{0} = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la famille  $\left(\binom{X}{0}, \dots, \binom{X}{n}\right)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Décomposez  $P$  sur la base de la question précédente.
3. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$ .
4. Question indépendante : Montrer que  $E = F \oplus G$  avec  $E$  l'ensemble des suites réelles convergentes,  $F$  l'ensemble des suites réelles de limite nulle et  $G$  l'ensemble des suites réelles constantes.

**Définition et QC**

**Définition/ Explication :** Donner la définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires et existence en dimension finie ?

**Démonstration :** Soit  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Montrer que cette famille est libre.

**Exercice 1**

1. Montrer que la famille  $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 2X - 1, 2X^2 + X + 3, X^2 + 4X - 9)$  est liée.
2. Calculer la dimension de  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .
3. A-t-on  $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  ?
4. Soit  $P = aX^2 + bX + c$  un élément de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b$  et  $c$  pour que  $P$  appartienne à  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .
5. Trouver un supplémentaire de  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 2**

Soit  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^4$  et  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels de  $E$  suivants :  $G = \{(a + b, a + b, 2b, a - b); (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$  et :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tel que } \begin{cases} x - y + iz - t = 0 \\ ix + y + z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

On note  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_1, \vec{g}_2$  les vecteurs de  $E$  définis ci-dessous :  $\vec{f}_1 = (1, i, -1, -2i + 1)$ ,  $\vec{f}_2 = (-i, -2 - i, i, 1)$ ,  $\vec{g}_1 = (1, 1, 4, -3)$ ,  $\vec{g}_2 = (6, 6, 4, 2)$ .

1. Déterminer une base et la dimension de  $F$  et  $G$ .
2. Justifier que  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$  est une base de  $F$  et  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$  une base de  $G$ .
3. Montrer que  $E = F \oplus G$ .
4. Question indépendante : Soient  $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$  et  $B = \{ \text{Applications constantes de } [0, 1] \text{ dans } \mathbb{R} \}$ . Démontrer que  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = A \oplus B$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Famille libre : si on ajoute un vecteur, est-ce encore libre ? Condition pour que cela reste libre ? Même question quand on en enlève un.

**Démonstration :** Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

### Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA \}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base et la dimension de  $\mathcal{C}$ .
3. Expliciter un supplémentaire de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

### Exercice 2

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$  où

$$\mathcal{F} = ((2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 0, 2, 1))$$

et  $G = \{ (x, y, z, t) \in E, 2x + 3y - 4z - t = 0 \}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est libre. En déduire la dimension de  $F$ .
2. Trouver une équation cartésienne de  $F$ .
- 3.(a) Soit  $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ . Vérifier que  $\vec{u} \in F \cap G$ .  
(b) Déterminer une base de  $F \cap G$ .
4. En déduire une base de  $E$  formée de  $\vec{u}$ , d'un autre vecteur de  $F \cap G$ , d'un vecteur de  $G$  et d'un dernier vecteur de  $E$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Que peut-on dire de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels ? de l'union ?

**Démonstration :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Montrer que, pour tout  $(u, a) \in E \times \mathbb{K}$ , on a :

- $a \cdot 0_E = 0_E$  et  $0 \cdot u = 0_E$ .
- $a \cdot u = 0_E \iff u = 0_E$  ou  $a = 0$ .

### Exercice 1

Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère l'ensemble  $F = \text{Vect}((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1))$  et :

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x + z = 0 \text{ et } y + x = z\}.$$

On appelle  $\mathcal{B}$  la famille  $((0, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (-1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ .

1. Montrer que  $G$  est un espace vectoriel.
2. Déterminer les dimensions de  $F$  et  $G$ .
3. Expliciter  $F \cap G$ .
4. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$  et en déduire que  $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ .

### Exercice 2

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1) \cdots (X-k+1)}{k!}.$$

On définit aussi  $\binom{X}{0} = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la famille  $\left(\binom{X}{0}, \dots, \binom{X}{n}\right)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Décomposez  $P$  sur la base de la question précédente.
3. Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) \in \mathbb{Z}$ . Montrer que :  $\forall a \in \mathbb{Z}, P(a) \in \mathbb{Z}$ .
4. Question indépendante : Montrer que  $E = F \oplus G$  avec  $E$  l'ensemble des suites réelles convergentes,  $F$  l'ensemble des suites réelles de limite nulle et  $G$  l'ensemble des suites réelles constantes.

**Définition et QC**

**Définition/ Explication :** Donner la définition de sous-espaces vectoriels supplémentaires et existence en dimension finie ?

**Démonstration :** Soit  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Montrer que cette famille est libre.

**Exercice 1**

1. Montrer que la famille  $(P_1, P_2, P_3) = (X^2 + 2X - 1, 2X^2 + X + 3, X^2 + 4X - 9)$  est liée.
2. Calculer la dimension de  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .
3. A-t-on  $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  ?
4. Soit  $P = aX^2 + bX + c$  un élément de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $a, b$  et  $c$  pour que  $P$  appartienne à  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .
5. Trouver un supplémentaire de  $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$  dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 2**

Soit  $E$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^4$  et  $F$  et  $G$  les sous-espaces vectoriels de  $E$  suivants :  $G = \{(a + b, a + b, 2b, a - b); (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$  et :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in E \text{ tel que } \begin{cases} x - y + iz - t = 0 \\ ix + y + z + t = 0 \end{cases} \right\}.$$

On note  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{g}_1, \vec{g}_2$  les vecteurs de  $E$  définis ci-dessous :  $\vec{f}_1 = (1, i, -1, -2i + 1)$ ,  $\vec{f}_2 = (-i, -2 - i, i, 1)$ ,  $\vec{g}_1 = (1, 1, 4, -3)$ ,  $\vec{g}_2 = (6, 6, 4, 2)$ .

1. Déterminer une base et la dimension de  $F$  et  $G$ .
2. Justifier que  $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$  est une base de  $F$  et  $(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$  une base de  $G$ .
3. Montrer que  $E = F \oplus G$ .
4. Question indépendante : Soient  $A = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}); \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$  et  $B = \{ \text{Applications constantes de } [0, 1] \text{ dans } \mathbb{R} \}$ . Démontrer que  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) = A \oplus B$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 21

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Famille libre : si on ajoute un vecteur, est-ce encore libre ? Condition pour que cela reste libre ? Même question quand on en enlève un.

**Démonstration :** Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont même cardinal.

### Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On note  $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA \}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{C}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .
2. Déterminer une base et la dimension de  $\mathcal{C}$ .
3. Expliciter un supplémentaire de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

### Exercice 2

Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ . Soit  $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$  où

$$\mathcal{F} = ((2, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 0), (1, 0, 2, 1))$$

et  $G = \{ (x, y, z, t) \in E, 2x + 3y - 4z - t = 0 \}$ .

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est libre. En déduire la dimension de  $F$ .
2. Trouver une équation cartésienne de  $F$ .
- 3.(a) Soit  $\vec{u} = (1, 1, 1, 1)$ . Vérifier que  $\vec{u} \in F \cap G$ .  
(b) Déterminer une base de  $F \cap G$ .
4. En déduire une base de  $E$  formée de  $\vec{u}$ , d'un autre vecteur de  $F \cap G$ , d'un vecteur de  $G$  et d'un dernier vecteur de  $E$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Famille génératrice : si on enlève un vecteur, est-ce encore générateur? Condition pour que cela reste générateur? Même question quand on en enlève un.

**Démonstration:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que toute famille de  $E$  à  $n$  éléments qui est libre ou génératrice est une base de  $E$ .

#### Exercice 1

- Soient  $A$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 et  $B$  l'ensemble des matrices d'ordre 3 dont la trace vaut 0 (la trace d'une matrice étant la somme de ses éléments diagonaux).
  - Démontrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
  - Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$ .
  - Démontrer que  $A \cap B$  est un espace vectoriel et déterminer une base de  $A \cap B$ .
- Soient  $A$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(1) = 0$  et  $B$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(1) = P(2)$ .
  - Démontrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
  - Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$ .
  - Démontrer que  $A \cap B$  est un espace vectoriel et déterminer une base de  $A \cap B$ .

#### Exercice 2

On note  $S$  l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles pour tout entier naturel } n, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

- Prouver que  $S$  est un espace vectoriel.
- Montrer que les suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $S$ .
- Montrer que  $\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$  est un sous-espace vectoriel de  $S$  et en donner une base.

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 22

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer le théorème de la base incomplète et de la base extraite.  
**Démonstration:** Caractérisation de la liberté par le rang.

### Exercice 1

On pose :

$$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(4) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q'(4) = 0\}.$$

1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ .
3. Montrer que  $\mathbb{R}_3[X] = A + B$ .
4. Trouver un supplémentaire de  $A$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

### Exercice 2

1. Trouver la dimension de  $A$  avec  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a + 2b & a + 2b \\ b & a + 3b + c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ .
2. Trouver un supplémentaire de  $A$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Trouver la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel constitué des suites arithmétiques.
4. Trouver la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  affines.
5. Trouver la dimension de  $B$  avec  $B$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  continues sur  $[0, 2]$  telles que  $f$  restreinte à  $[0, 1]$  soit une fonction affine et  $f$  restreinte à  $[1, 2]$  soit aussi une fonction affine.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Dimension et famille libre ?

**Démonstration:** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0\}$ .

### Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \}$$

$$G = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \}$$

$$H = \text{vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2), (3, 11, 2, -1)).$$

1. Donner une base de  $F \cap G$ , puis sa dimension.
2. Montrer que  $H \subset F \cap G$ .
3. En déduire que  $H = F \cap G$ .
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \}$$

$$G = \{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \}$$

$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

### Exercice 2

On considère l'ensemble  $U = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0 \}$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on définit les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, -1, -1, 0), e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1+\lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1+\lambda, -1-\lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel  $\lambda$ , on appelle  $V_\lambda$  l'espace engendré par  $e_1, e_{2,\lambda}, e_{3,\lambda}$  et  $e_{4,\lambda}$ .

1. Montrer que  $U$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de  $V_\lambda$  et une base de  $V_\lambda$  pour tout réel  $\lambda$ .
3. Montrer que  $V_{-1} = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a + b = a + c = 0 \}$ .
4. Soit  $\lambda$  un réel. Déterminer une base de  $U \cap V_\lambda$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Compléter : Soient  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- $(u)$  est une famille libre si et seulement si ....
- $(u, v)$  est une famille libre si et seulement si ....
- Soit  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille de polynômes .... dont les degrés sont ..... alors cette famille est libre.

**Démonstration :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que toute famille de  $E$  à  $n$  éléments qui est libre ou génératrice est une base de  $E$ .

### Exercice 1

1. Soient  $A$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 et  $B$  l'ensemble des matrices d'ordre 3 dont la trace vaut 0 (la trace d'une matrice étant la somme de ses éléments diagonaux).
  - (a) Démontrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
  - (b) Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$ .
  - (c) Démontrer que  $A \cap B$  est un espace vectoriel et déterminer une base de  $A \cap B$ .
2. Soient  $A$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(1) = 0$  et  $B$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(1) = P(2)$ .
  - (a) Démontrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
  - (b) Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$ .
  - (c) Démontrer que  $A \cap B$  est un espace vectoriel et déterminer une base de  $A \cap B$ .

### Exercice 2

On note  $S$  l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles pour tout entier naturel } n, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que  $S$  est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $S$ .
3. Montrer que  $\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$  est un sous-espace vectoriel de  $S$  et en donner une base.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Compléter : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $E$ .

- Si  $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) = \dots$ .
- Si  $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre alors ...

**Démonstration :** Caractérisation de la liberté par le rang.

#### Exercice 1

On pose :

$$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(4) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q'(4) = 0\}.$$

1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ .
3. Montrer que  $\mathbb{R}_3[X] = A + B$ .
4. Trouver un supplémentaire de  $A$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

#### Exercice 2

1. Trouver la dimension de  $A$  avec  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ b & a+3b+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ .
2. Trouver un supplémentaire de  $A$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Trouver la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel constitué des suites arithmétiques.
4. Trouver la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  affines.
5. Trouver la dimension de  $B$  avec  $B$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  continues sur  $[0, 2]$  telles que  $f$  restreinte à  $[0, 1]$  soit une fonction affine et  $f$  restreinte à  $[1, 2]$  soit aussi une fonction affine.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Dimension et famille génératrice ?

**Démonstration :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \dots$ .

### Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \}$$

$$G = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \}$$

$$H = \text{vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2), (3, 11, 2, -1)).$$

1. Donner une base de  $F \cap G$ , puis sa dimension.
2. Montrer que  $H \subset F \cap G$ .
3. En déduire que  $H = F \cap G$ .
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \}$$

$$G = \{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \}$$

$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

### Exercice 2

On considère l'ensemble  $U = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0 \}$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on définit les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, -1, -1, 0), e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1+\lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1+\lambda, -1-\lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel  $\lambda$ , on appelle  $V_\lambda$  l'espace engendré par  $e_1, e_{2,\lambda}, e_{3,\lambda}$  et  $e_{4,\lambda}$ .

1. Montrer que  $U$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de  $V_\lambda$  et une base de  $V_\lambda$  pour tout réel  $\lambda$ .
3. Montrer que  $V_{-1} = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a + b = a + c = 0 \}$ .
4. Soit  $\lambda$  un réel. Déterminer une base de  $U \cap V_\lambda$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Compléter : Soient  $u, v$  et  $w$  trois vecteurs de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- $(u)$  est une famille libre si et seulement si ....
- $(u, v)$  est une famille libre si et seulement si ....
- Soit  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$  une famille de polynômes .... dont les degrés sont ..... alors cette famille est libre.

**Démonstration :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Montrer que toute famille de  $E$  à  $n$  éléments qui est libre ou génératrice est une base de  $E$ .

### Exercice 1

1. Soient  $A$  l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3 et  $B$  l'ensemble des matrices d'ordre 3 dont la trace vaut 0 (la trace d'une matrice étant la somme de ses éléments diagonaux).
  - (a) Démontrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
  - (b) Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$ .
  - (c) Démontrer que  $A \cap B$  est un espace vectoriel et déterminer une base de  $A \cap B$ .
2. Soient  $A$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(1) = 0$  et  $B$  l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}_3[X]$  tel que  $P(1) = P(2)$ .
  - (a) Démontrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
  - (b) Déterminer une base de  $A$  et une base de  $B$ .
  - (c) Démontrer que  $A \cap B$  est un espace vectoriel et déterminer une base de  $A \cap B$ .

### Exercice 2

On note  $S$  l'ensemble suivant :

$$S = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles pour tout entier naturel } n, (n+1)u_{n+1} - (n+2)u_n + u_{n-1} = 0 \right\}.$$

1. Prouver que  $S$  est un espace vectoriel.
2. Montrer que les suites  $(1)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $S$ .
3. Montrer que  $\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S \text{ tel que } u_2 = 0 \}$  est un sous-espace vectoriel de  $S$  et en donner une base.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Compléter : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $E$ .

- Si  $e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}) = \dots$ .
- Si  $e_{n+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre alors ...

**Démonstration :** Caractérisation de la liberté par le rang.

#### Exercice 1

On pose :

$$A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P(4) = 0\} \quad \text{et} \quad B = \{Q \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } Q'(4) = 0\}.$$

1. Montrer que  $A$  et  $B$  sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer des familles génératrices pour chacune de  $A$ ,  $B$  et  $A \cap B$ .
3. Montrer que  $\mathbb{R}_3[X] = A + B$ .
4. Trouver un supplémentaire de  $A$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

#### Exercice 2

1. Trouver la dimension de  $A$  avec  $A = \left\{ \begin{pmatrix} a+2b & a+2b \\ b & a+3b+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ .
2. Trouver un supplémentaire de  $A$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
3. Trouver la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel constitué des suites arithmétiques.
4. Trouver la dimension du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  affines.
5. Trouver la dimension de  $B$  avec  $B$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions  $f$  continues sur  $[0, 2]$  telles que  $f$  restreinte à  $[0, 1]$  soit une fonction affine et  $f$  restreinte à  $[1, 2]$  soit aussi une fonction affine.

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 22

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Dimension et famille génératrice ?

**Démonstration :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \dots$ .

### Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + 4z + 3t = 0 \}$$

$$G = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 4z + 3t = 0 \}$$

$$H = \text{vect}((-3, 1, 1, 1), (6, 2, -1, -2), (3, 11, 2, -1)).$$

1. Donner une base de  $F \cap G$ , puis sa dimension.
2. Montrer que  $H \subset F \cap G$ .
3. En déduire que  $H = F \cap G$ .
4. Recommencer l'exercice avec :

$$F = \{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } 2x - y + 4z + 3t = 0 \}$$

$$G = \{ x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que : } y - 4z + 3t = 0 \}$$

$$H = \text{vect}(-3 + X + X^2 + X^3, 6 + 2X - X^2 - 2X^3, 3 + 11X + 2X^2 - X^3).$$

### Exercice 2

On considère l'ensemble  $U = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } c + d = a + b + 2d = 0 \}$ . Pour tout réel  $\lambda$ , on définit les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1, -1, -1, 0), e_{2,\lambda} = (1, \lambda, \lambda, -1), e_{3,\lambda} = (2, -1+\lambda, -2, -\lambda) \text{ et } e_{4,\lambda} = (1+\lambda, -1-\lambda, 0, 1).$$

Pour tout réel  $\lambda$ , on appelle  $V_\lambda$  l'espace engendré par  $e_1, e_{2,\lambda}, e_{3,\lambda}$  et  $e_{4,\lambda}$ .

1. Montrer que  $U$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et déterminer sa dimension.
2. Déterminer la dimension de  $V_\lambda$  et une base de  $V_\lambda$  pour tout réel  $\lambda$ .
3. Montrer que  $V_{-1} = \{ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } a + b = a + c = 0 \}$ .
4. Soit  $\lambda$  un réel. Déterminer une base de  $U \cap V_\lambda$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Application linéaire et image d'une base : que peut-on dire ?

**Démonstration:** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective si et seulement si  $f$  est bijective.

**Exercice 1**

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xy + z \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (x, y) & \mapsto xX - y + x \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.

3. Y-a-t-il des projecteurs/symétries dans cet exercice ?

**Exercice 2**

Soient  $D = \text{Vect}((1, 1, 2))$  et  $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de  $f$ , déterminer son noyau et son image.

2. Déterminer une base de  $P$ .

3. Vérifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.

4. Montrer que  $f(D) \subset D$ .

5. En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Énoncer le théorème du rang et donner quelques conséquences.

**Démonstration:** Matrice de  $f(x)$ .

#### Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, z, y + x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice. Donner aussi une autre matrice associée à chaque fois.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

#### Exercice 2

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel de dimension  $N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$ .
2. On suppose, uniquement dans cette question, que  $n$  est un entier naturel tel que  $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^n)$ .
3. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(\dim(\text{Ker}(f^n)))_{n \geq m}$  soit constante et prouver que, si  $n_0$  est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors  $n_0 \leq N$ .
4. En déduire que, si  $f$  est nilpotent, alors  $f^N = 0$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir application linéaire, isomorphisme, endomorphisme et forme linéaire.

**Démonstration:** Matrice et isomorphisme.

#### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes!

1. On note  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_2$  la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante :  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

(a) Expliciter les endomorphismes  $f_1, f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^4$  définies par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) = B, \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f_2) = B \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f_3) = B \text{ avec : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliciter noyau et image de  $f_1, f_2$  et  $f_3$ .

2. Soit  $F = \text{Vect}(1 - X, X - X^2)$ . Donner des équations cartésiennes de  $F$  (on proposera deux méthodes).

#### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :

$$p + q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

- (a) Montrer qu'il existe un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .
- (b) Donner la matrice de  $f$  dans cette base.
- (c) Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est un automorphisme et évaluer  $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Application linéaire et image d'une base : que peut-on dire ?

**Démonstration:** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective si et seulement si  $f$  est bijective.

**Exercice 1**

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xy + z \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (x, y) & \mapsto xX - y + x \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.

3. Y-a-t-il des projecteurs/symétries dans cet exercice ?

**Exercice 2**

Soient  $D = \text{Vect}((1, 1, 2))$  et  $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de  $f$ , déterminer son noyau et son image.

2. Déterminer une base de  $P$ .

3. Vérifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.

4. Montrer que  $f(D) \subset D$ .

5. En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Énoncer le théorème du rang et donner quelques conséquences.

**Démonstration:** Matrice de  $f(x)$ .

#### Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, z, y + x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice. Donner aussi une autre matrice associée à chaque fois.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

#### Exercice 2

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel de dimension  $N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$ .
2. On suppose, uniquement dans cette question, que  $n$  est un entier naturel tel que  $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^n)$ .
3. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(\dim(\text{Ker}(f^n)))_{n \geq m}$  soit constante et prouver que, si  $n_0$  est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors  $n_0 \leq N$ .
4. En déduire que, si  $f$  est nilpotent, alors  $f^N = 0$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Définir application linéaire, isomorphisme, endomorphisme et forme linéaire.

**Démonstration:** Matrice et isomorphisme.

#### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes!

1. On note  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_2$  la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante :  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

(a) Expliciter les endomorphismes  $f_1, f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^4$  définies par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) = B, \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f_2) = B \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f_3) = B \text{ avec : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliciter noyau et image de  $f_1, f_2$  et  $f_3$ .

2. Soit  $F = \text{Vect}(1 - X, X - X^2)$ . Donner des équations cartésiennes de  $F$  (on proposera deux méthodes).

#### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :

$$p + q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

- (a) Montrer qu'il existe un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .
- (b) Donner la matrice de  $f$  dans cette base.
- (c) Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est un automorphisme et évaluer  $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ .

## MP2I Sujet 1

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E_n, E_p)$  avec  $E_n$  espace de dimension  $n$  et  $E_p$  espace de dimension  $p$ . Que peut-on dire si  $u$  injective? surjective? bijective?

**Démonstration :** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Montrer que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective si et seulement si  $f$  est bijective.

#### Exercice 1

1. Dire (avec démo!) si les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$(a) f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_1, u_4) \end{cases}$$

$$(c) f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto xy + z \end{cases}$$

$$(b) f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ (x, y) & \mapsto xX - y + x \end{cases}$$

$$(d) f_4 : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f'' - f \end{cases}$$

2. Expliciter le noyau des applications linéaires de cet exercice.

3. Y-a-t-il des projecteurs/symétries dans cet exercice?

#### Exercice 2

Soient  $D = \text{Vect}((1, 1, 2))$  et  $P = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$  avec :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (3x + y - z, 2x + 2y - z, 4x + 2y - z) \end{cases}$$

1. Donner le rang de  $f$ , déterminer son noyau et son image.

2. Déterminer une base de  $P$ .

3. Vérifier que  $P$  et  $D$  sont supplémentaires.

4. Montrer que  $f(D) \subset D$ .

5. En déduire une base dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir formes linéaires et hyperplans.

**Démonstration :** Matrice de  $f(x)$ .

#### Exercice 1

Soient les applications :

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (xy, z) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, z, y + x) \end{cases}$$

1. Préciser à chaque fois si ces applications suivantes sont ou non linéaires.
2. Donner les matrices canoniquement associées aux applications linéaires de cet exercice. Donner aussi une autre matrice associée à chaque fois.
3. Évaluer le rang des applications linéaires de cet exercice.
4. Préciser si les applications linéaires de cet exercice sont injectives (resp. surjectives, bijectives) ?

#### Exercice 2

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  un espace vectoriel de dimension  $N$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

1. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\text{Ker}(f^n) \subset \text{Ker}(f^{n+1})$ .
2. On suppose, uniquement dans cette question, que  $n$  est un entier naturel tel que  $\text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^{n+1})$ .
  - (a) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Ker}(f^m) = \text{Ker}(f^n)$ .
  - (b) Montrer que, pour tout entier  $m$  supérieur à  $n$ , on a alors :  $\text{Im}(f^m) = \text{Im}(f^n)$ .
3. Montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que la suite  $(\dim(\text{Ker}(f^n)))_{n \geq m}$  soit constante et prouver que, si  $n_0$  est le plus petit entier naturel tel que cette suite soit constante alors  $n_0 \leq N$ .
4. En déduire que, si  $f$  est nilpotent, alors  $f^N = 0$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 24

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir application linéaire, isomorphisme, automorphisme et forme linéaire.

**Démonstration :** Matrice et isomorphisme.

### Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes!

1. On note  $\mathcal{B}_1$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}_2$  la base de  $\mathbb{R}^3$  suivante :  $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

(a) Expliciter les endomorphismes  $f_1, f_2$  et  $f_3$  de  $\mathbb{R}^4$  définies par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_1) = B, \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f_2) = B \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(f_3) = B \text{ avec : } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliciter noyau et image de  $f_1, f_2$  et  $f_3$ .

2. Soit  $F = \text{Vect}(1 - X, X - X^2)$ . Donner des équations cartésiennes de  $F$  (on proposera deux méthodes).

### Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes!

1. Soient  $p$  et  $q$  deux projecteurs. Montrer l'équivalence suivante :

$$p + q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = 0.$$

2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  ( $n$  entier naturel non nul) et  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

- (a) Montrer qu'il existe un vecteur  $a$  de  $E$  tel que  $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^{n-1}(a))$  soit une base de  $E$ .
- (b) Donner la matrice de  $f$  dans cette base.
- (c) Montrer que  $\text{Id}_E - f$  est un automorphisme et évaluer  $(\text{Id}_E - f)^{-1}$ .

# MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles finis. Que vaut  $\text{Card}(F \times G)$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{P}(F))$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{F}(F, G))$ ?

**Démonstration:** Variance de  $aX + b$  et preuve qu'une variable centrée réduite associée à une variable aléatoire est une variable centrée réduite.

### Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. Un groupe de  $2n$  personnes comprend  $n$  hommes et  $n$  femmes dont M Dupont et Mme Durand.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer dans une salle ayant  $2n$  chaises?
2. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde?
3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus M Dupont et Mme Durand soient à côté l'un de l'autre.

### Exercice 2

On dispose de trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne  $A$  contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne  $B$  contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne  $C$  contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience* : On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ?
2. *Deuxième expérience* : avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, on choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu  $n$  boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter.
  - (c) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'évènement : "La première boule noire a été tirée au  $k$ -ième tirage". Calculer  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (d) Déterminer la limite de  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter.

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Définir et expliciter  $A_n^p$  et  $\binom{n}{p}$ .

**Démonstration:** Démontrer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

#### Exercice 1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $n - X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Évaluer  $E(Y^2)$  de deux façons différentes.
3. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{1}{1 + X}$ .
4. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne). On note  $D$  l'événement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $R_i$  l'événement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est  $i$ ".
  - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{R_i}(D)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
  - (c) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Compléter : Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $A$  et  $B$  deux événements, on a :

- $P(\overline{A}) = \dots$ ,
- Si  $A \subset B$ , on a :  $\dots$ ,
- $P(A \cup B) = \dots$ ,
- $P(B \setminus A) \dots$ .

**Démonstration:** Calcul de l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale.

#### Exercice 1

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué : le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

1. (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?  
(b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?  
(c) Plus généralement, s'il lance le dé  $n$  fois (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), quelle est la probabilité qu'il obtienne  $n$  fois le chiffre 6?
2. Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
  - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
  - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué ?

#### Exercice 2

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Déterminer  $T(\Omega)$ .
2. Calculer  $P(T = 2)$ .
3. Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{(T > k-1)}(T > k)$ .
4. En déduire la loi de  $T$ .

Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles finis. Que vaut  $\text{Card}(F \times G)$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{P}(F))$ ? Que vaut  $\text{Card}(\mathcal{F}(F, G))$ ?

**Démonstration:** Variance de  $aX + b$  et preuve qu'une variable centrée réduite associée à une variable aléatoire est une variable centrée réduite.

Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. Un groupe de  $2n$  personnes comprend  $n$  hommes et  $n$  femmes dont M Dupont et Mme Durand.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer dans une salle ayant  $2n$  chaises?
2. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme?
4. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus M Dupont et Mme Durand soient à côté l'un de l'autre.

Exercice 2

On dispose de trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne  $A$  contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne  $B$  contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne  $C$  contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience* : On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ?
2. *Deuxième expérience* : avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, on choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu  $n$  boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$ ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ? Interpréter.
  - (c) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'évènement : "La première boule noire a été tirée au  $k$ -ième tirage". Calculer  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (d) Déterminer la limite de  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter le résultat obtenu.

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. Définir et expliciter  $A_n^p$  et  $\binom{n}{p}$ .

**Démonstration:** Démontrer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

#### Exercice 1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $n - X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Évaluer  $E(Y^2)$  de deux façons différentes.
3. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{1}{1 + X}$ .
4. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne). On note  $D$  l'événement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $R_i$  l'événement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est  $i$ ".
  - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{R_i}(D)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
  - (c) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Compléter : Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $A$  et  $B$  deux événements, on a :

- $P(\overline{A}) = \dots$ ,
- Si  $A \subset B$ , on a :  $\dots$ ,
- $P(A \cup B) = \dots$ ,
- $P(B \setminus A) \dots$ .

**Démonstration:** Calcul de l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale.

#### Exercice 1

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué : le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

1. (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?  
(b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?  
(c) Plus généralement, s'il lance le dé  $n$  fois (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), quelle est la probabilité qu'il obtienne  $n$  fois le chiffre 6?
2. Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
  - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
  - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué ?

#### Exercice 2

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Déterminer  $T(\Omega)$ .
2. Calculer  $P(T = 2)$ .
3. Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{(T > k-1)}(T > k)$ .
4. En déduire la loi de  $T$ .

# MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

## COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Soient  $F$  et  $G$  deux ensembles finis.

- Combien y-a-t-il d'applications de  $G$  vers  $F$  ?
- Combien y-a-t-il d'injections de  $G$  vers  $F$  ?

**Démonstration :** Variance de  $aX + b$  et preuve qu'une variable centrée réduite associée à une variable aléatoire est une variable centrée réduite.

### Exercice 1

Soit  $n$  un entier supérieur à 2. Un groupe de  $2n$  personnes comprend  $n$  hommes et  $n$  femmes dont M Dupont et Mme Durand.

1. Combien y a-t-il de manières de les disposer dans une salle ayant  $2n$  chaises ?
2. Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives ? (deux dispositions sont identiques si chaque invité a le même voisin à sa gauche et le même voisin à sa droite).
3. Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme ?
4. Même question si on veut respecter l'alternance homme-femme et que de plus M Dupont et Mme Durand soient à côté l'un de l'autre.

### Exercice 2

On dispose de trois urnes  $A$ ,  $B$  et  $C$  contenant chacune 6 boules blanches ou noires. L'urne  $A$  contient 4 boules blanches et 2 boules noires. L'urne  $B$  contient 3 boules blanches et 3 boules noires. L'urne  $C$  contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

1. *Première expérience :* On choisit une urne au hasard et on tire successivement, **sans remise**, deux boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$  ?
2. *Deuxième expérience :* avec les conditions initiales décrites par l'énoncé, on choisit une urne au hasard et on tire successivement, **avec remise**,  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) boules de cette urne.
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir  $n$  boules noires.
  - (b) Sachant qu'on a obtenu  $n$  boules noires, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne  $C$  ? Quelle est la limite de cette probabilité lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ? Interpréter.
  - (c) Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_k$  l'évènement : "La première boule noire a été tirée au  $k$ -ième tirage". Calculer  $P(A_k)$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (d) Déterminer la limite de  $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter le résultat obtenu.

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  un espace probabilisable fini. Dire ce qu'est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  et en donner une.

**Démonstration :** Démontrer la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales.

#### Exercice 1

Soit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  avec  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $n - X$  ainsi que son espérance et sa variance.
2. Évaluer  $E(Y^2)$  de deux façons différentes.
3. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{1}{1 + X}$ .
4. Évaluer  $E(Y)$  avec  $Y = \frac{\alpha^X}{2^n}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées : 3 sont rouges et 5 sont noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? bicolore ?
3. On conserve les trois boules extraites au cours de l'expérience (on ne les remet pas dans l'urne) et on effectue un second tirage dans l'urne et son nouveau contenu (on tire donc à nouveau simultanément et au hasard trois boules de l'urne). On note  $D$  l'événement : "tirer exactement une boule rouge au cours du second tirage" et, pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , on note  $R_i$  l'événement : "le nombre de boule(s) rouge(s) tirée(s) au premier tirage est  $i$ ".
  - (a) Calculer les probabilités conditionnelles  $P_{R_i}(D)$  pour tout  $i \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge au cours du second tirage ?
  - (c) On obtient au cours du second tirage exactement une boule rouge. Quelle est la probabilité d'avoir tiré au moins une boule rouge au cours du premier tirage ?

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 25

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer la formule des probabilités composées et celle de Bayes.

**Démonstration :** Calcul de l'espérance d'une variable suivant une loi binomiale.

#### Exercice 1

Dans un casino, un joueur a dans sa poche deux dés. L'un est non pipé et l'autre est truqué : le dé truqué donne le chiffre 6 avec la probabilité  $\frac{1}{2}$ . Le joueur choisit un dé *au hasard* dans sa poche :

1. (a) Il lance le dé une fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un 6?  
(b) Il lance le dé deux fois. Quelle est la probabilité qu'il obtienne deux 6?  
(c) Plus généralement, s'il lance le dé  $n$  fois (où  $n \in \mathbb{N}^*$ ), quelle est la probabilité qu'il obtienne  $n$  fois le chiffre 6?
2. Se sentant menacé d'exclusion du casino, le joueur décide de se débarrasser du dé truqué. Pour cela, il choisit au hasard un dé et le lance :
  - S'il obtient un 6, il considère que c'est le dé truqué et le jette.
  - Sinon, il considère que c'est le dé honnête et jette l'autre dé.Quelle est la probabilité que le joueur ait conservé le dé truqué ?

#### Exercice 2

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Déterminer  $T(\Omega)$ .
2. Calculer  $P(T = 2)$ .
3. Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{(T > k-1)}(T > k)$ .
4. En déduire la loi de  $T$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 26

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer la formule des probabilités totales et celle de Bayes.

**Démonstration:** Inégalités de Markov et de Tchebychev.

#### Exercice 1

On prélève cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes (une main désignant un ensemble de 5 cartes distinctes) ?
2. Parmi elles, combien contiennent au moins une dame ?
3. Parmi elles, combien contiennent exactement deux paires ?
4. Parmi elles, combien contiennent un full (i.e. un brelan et une paire) ?
5. On décide maintenant de tirer successivement et sans remises 5 cartes. Déterminer la probabilité que la cinquième soit un pique.

#### Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés.
  - Les soirs d'ivresse, il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte, et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même!
  - Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées. La porte ayant été ouverte au huitième essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ?
2. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. On effectue alors un second tirage et on note  $Y$  le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi et l'espérance de  $Y$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 26

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Petit cours sur la loi uniforme.

**Démonstration:** Montrer que  $P(B \setminus A) = \dots$  et  $P(A \cup B) = \dots$ .

### Exercice 1

Un biathlète affiche 90% de réussite au tir. Une course comporte 20 tirs, une saison 18 courses à 20 tirs et notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial. On note  $Z$  le nombre de tir réussi sur une course,  $X$  le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison et  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de  $Z$  puis celle de  $X$  et enfin celle de  $Y$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de boîtes contenant des stylos bleus, noirs, verts et rouges en quantités illimitées. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on tire au hasard une couleur puis l'on met dans la trousse un stylo de cette couleur. On obtient ainsi une trousse contenant  $n$  stylos. On considère les variables aléatoires  $B, N, V$  et  $R$  correspondant aux nombres respectifs de stylos bleus, noirs, verts et rouges présents dans la trousse.

1. Donner les lois des variables aléatoires  $B, N, V$  et  $R$ .
- 2.
3. Exprimer de deux manières  $E((B + N + V + R)^2)$ .
4. En déduire  $E(B \times N)$  puis  $\text{Cov}(B, N)$ .
5. Soit  $p \in ]0, 1[$  Chaque stylo a une probabilité  $p$  de ne pas fonctionner, ceci indépendamment des autres stylos. On note  $B'$  la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos bleus qui ne fonctionnent pas.
  - (a) Déterminer la loi de  $B'$ .
  - (b) Les variables aléatoires  $B'$  et  $B - B'$  sont-elles indépendantes?
6. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de couleurs vérifiant que l'un des stylos dans la trousse est de cette couleur.
  - (a) Exprimer  $X$  en fonction des fonctions indicatrices  $\mathbf{1}_{(B=0)}$ ,  $\mathbf{1}_{(N=0)}$ ,  $\mathbf{1}_{(V=0)}$  et  $\mathbf{1}_{(R=0)}$  et en déduire  $E(X)$ .
  - (b) Déterminer  $E(\mathbf{1}_{(B=0)} \times \mathbf{1}_{(N=0)})$  et en déduire  $V(X)$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 26

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Petit cours sur la loi binomiale.

**Démonstration:**  $\mathcal{P}(F)$ , avec  $F$  ensemble fini, est un ensemble fini et  $\text{Card}(\mathcal{P}(F)) =$

### Exercice 1

On pose  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $n$  entier supérieur à 3. Soit  $k \in E$ . Dénombrer le nombre de parties de  $E$ , le nombre de parties de  $E$  formées de  $k$  éléments, le nombre de  $k$ -uplets de  $E$ , le nombre de  $k$ -uplets d'éléments deux à deux distincts de  $E$ , le nombre de  $k$ -uplets d'éléments de  $E$  ordonnés dans l'ordre strictement croissant.

### Exercice 2

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à  $n$  clients ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), chacun des clients choisit de manière indépendante exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

- $A_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, une seule formule a été choisie" ;
  - $B_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, exactement deux formules ont été choisies" ;
  - $C_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, les trois formules ont été choisies" ;
- et  $a_k = P(A_k)$ ,  $b_k = P(B_k)$  et  $c_k = P(C_k)$ .

1. Évaluer  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ , montrer que  $a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $b_2 = \frac{2}{3}$ ,  $c_2 = 0$  puis déterminer  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $c_3$ .

2. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles  $P_{A_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(C_{k+1})$  (avec  $k$  entier supérieur à 3).

3. Montrer que  $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$  avec  $M$  une matrice à expliciter.

4. En déduire une formule exprimant  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  en fonction de  $M$  et  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

5. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n)$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 26

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir la notion d'événements indépendants et de variables indépendantes.

**Démonstration :** Inégalités de Markov et de Tchebychev.

#### Exercice 1

On prélève cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes (une main désignant un ensemble de 5 cartes distinctes) ?
2. Parmi elles, combien contiennent au moins une dame ?
3. Parmi elles, combien contiennent exactement deux paires ?
4. Parmi elles, combien contiennent un full (i.e. un brelan et une paire) ?
5. On décide maintenant de tirer successivement et sans remises 5 cartes. Déterminer la probabilité que la cinquième soit un pique.

#### Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés.
  - Les soirs d'ivresse, il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte, et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même!
  - Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées.La porte ayant été ouverte au huitième essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ?
2. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. On effectue alors un second tirage et on note  $Y$  le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi et l'espérance de  $Y$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 26

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Petit cours sur la loi de Bernoulli.

**Démonstration :** Montrer que  $P(B \setminus A) = \dots$  et  $P(A \cup B) = \dots$ .

### Exercice 1

Un biathlète affiche 90% de réussite au tir. Une course comporte 20 tirs, une saison 18 courses à 20 tirs et notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial. On note  $Z$  le nombre de tir réussi sur une course,  $X$  le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison et  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de  $Z$  puis celle de  $X$  et enfin celle de  $Y$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de boîtes contenant des stylos bleus, noirs, verts et rouges en quantités illimitées. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on tire au hasard une couleur puis l'on met dans la trousse un stylo de cette couleur. On obtient ainsi une trousse contenant  $n$  stylos. On considère les variables aléatoires  $B, N, V$  et  $R$  correspondant aux nombres respectifs de stylos bleus, noirs, verts et rouges présents dans la trousse.

1. Donner les lois des variables aléatoires  $B, N, V$  et  $R$ .
- 2.
3. Exprimer de deux manières  $E((B + N + V + R)^2)$ .
4. En déduire  $E(B \times N)$  puis  $\text{Cov}(B, N)$ .
5. Soit  $p \in ]0, 1[$  Chaque stylo a une probabilité  $p$  de ne pas fonctionner, ceci indépendamment des autres stylos. On note  $B'$  la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos bleus qui ne fonctionnent pas.
  - (a) Déterminer la loi de  $B'$ .
  - (b) Les variables aléatoires  $B'$  et  $B - B'$  sont-elles indépendantes?
6. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de couleurs vérifiant que l'un des stylos dans la trousse est de cette couleur.
  - (a) Exprimer  $X$  en fonction des fonctions indicatrices  $\mathbf{1}_{(B=0)}$ ,  $\mathbf{1}_{(N=0)}$ ,  $\mathbf{1}_{(V=0)}$  et  $\mathbf{1}_{(R=0)}$  et en déduire  $E(X)$ .
  - (b) Déterminer  $E(\mathbf{1}_{(B=0)} \times \mathbf{1}_{(N=0)})$  et en déduire  $V(X)$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 26

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir loi, espérance et variance.

**Démonstration :**  $\mathcal{P}(F)$ , avec  $F$  ensemble fini, est un ensemble fini et  $\text{Card}(\mathcal{P}(F)) =$

### Exercice 1

On pose  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $n$  entier supérieur à 3. Soit  $k \in E$ . Dénombrer le nombre de parties de  $E$ , le nombre de parties de  $E$  formées de  $k$  éléments, le nombre de  $k$ -uplets de  $E$ , le nombre de  $k$ -uplets d'éléments deux à deux distincts de  $E$ , le nombre de  $k$ -uplets d'éléments de  $E$  ordonnés dans l'ordre strictement croissant.

### Exercice 2

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à  $n$  clients ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), chacun des clients choisit de manière indépendante exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

- $A_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, une seule formule a été choisie" ;
  - $B_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, exactement deux formules ont été choisies" ;
  - $C_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, les trois formules ont été choisies" ;
- et  $a_k = P(A_k)$ ,  $b_k = P(B_k)$  et  $c_k = P(C_k)$ .

1. Évaluer  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ , montrer que  $a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $b_2 = \frac{2}{3}$ ,  $c_2 = 0$  puis déterminer  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $c_3$ .

2. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles  $P_{A_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(C_{k+1})$  (avec  $k$  entier supérieur à 3).

3. Montrer que  $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$  avec  $M$  une matrice à expliciter.

4. En déduire une formule exprimant  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  en fonction de  $M$  et  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

5. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n)$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 26

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir la notion d'événements indépendants et de variables indépendantes.

**Démonstration :** Inégalités de Markov et de Tchebychev.

#### Exercice 1

On prélève cinq cartes d'un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes (une main désignant un ensemble de 5 cartes distinctes) ?
2. Parmi elles, combien contiennent au moins une dame ?
3. Parmi elles, combien contiennent exactement deux paires ?
4. Parmi elles, combien contiennent un full (i.e. un brelan et une paire) ?
5. On décide maintenant de tirer successivement et sans remises 5 cartes. Déterminer la probabilité que la cinquième soit un pique.

#### Exercice 2

Ces deux questions sont indépendantes.

1. Un voleur se cache pour observer un veilleur de nuit ouvrir une porte. Il sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Celui-ci a un trousseau de 10 clés.
  - Les soirs d'ivresse, il essaie une clé au hasard, la remet si elle n'ouvre pas la porte, et recommence, en essayant éventuellement plusieurs fois la même!
  - Lorsqu'il est à jeun au contraire, il prend soin de séparer les clés déjà essayées.La porte ayant été ouverte au huitième essai, le voleur en déduit que le veilleur de nuit est ivre et décide de tenter son coup. Quelle probabilité a-t-il de se tromper ?
2. Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. On effectue alors un second tirage et on note  $Y$  le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi et l'espérance de  $Y$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 26

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Petit cours sur la loi de Bernoulli.

**Démonstration :** Montrer que  $P(B \setminus A) = \dots$  et  $P(A \cup B) = \dots$ .

### Exercice 1

Un biathlète affiche 90% de réussite au tir. Une course comporte 20 tirs, une saison 18 courses à 20 tirs et notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial. On note  $Z$  le nombre de tir réussi sur une course,  $X$  le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison et  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de  $Z$  puis celle de  $X$  et enfin celle de  $Y$ .

### Exercice 2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de boîtes contenant des stylos bleus, noirs, verts et rouges en quantités illimitées. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on tire au hasard une couleur puis l'on met dans la trousse un stylo de cette couleur. On obtient ainsi une trousse contenant  $n$  stylos. On considère les variables aléatoires  $B, N, V$  et  $R$  correspondant aux nombres respectifs de stylos bleus, noirs, verts et rouges présents dans la trousse.

1. Donner les lois des variables aléatoires  $B, N, V$  et  $R$ .
- 2.
3. Exprimer de deux manières  $E((B + N + V + R)^2)$ .
4. En déduire  $E(B \times N)$  puis  $\text{Cov}(B, N)$ .
5. Soit  $p \in ]0, 1[$  Chaque stylo a une probabilité  $p$  de ne pas fonctionner, ceci indépendamment des autres stylos. On note  $B'$  la variable aléatoire correspondant au nombre de stylos bleus qui ne fonctionnent pas.
  - (a) Déterminer la loi de  $B'$ .
  - (b) Les variables aléatoires  $B'$  et  $B - B'$  sont-elles indépendantes?
6. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au nombre de couleurs vérifiant que l'un des stylos dans la trousse est de cette couleur.
  - (a) Exprimer  $X$  en fonction des fonctions indicatrices  $\mathbf{1}_{(B=0)}$ ,  $\mathbf{1}_{(N=0)}$ ,  $\mathbf{1}_{(V=0)}$  et  $\mathbf{1}_{(R=0)}$  et en déduire  $E(X)$ .
  - (b) Déterminer  $E(\mathbf{1}_{(B=0)} \times \mathbf{1}_{(N=0)})$  et en déduire  $V(X)$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 26

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Définir loi, espérance et variance.

**Démonstration :**  $\mathcal{P}(F)$ , avec  $F$  ensemble fini, est un ensemble fini et  $\text{Card}(\mathcal{P}(F)) =$

### Exercice 1

On pose  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $n$  entier supérieur à 3. Soit  $k \in E$ . Dénombrer le nombre de parties de  $E$ , le nombre de parties de  $E$  formées de  $k$  éléments, le nombre de  $k$ -uplets de  $E$ , le nombre de  $k$ -uplets d'éléments deux à deux distincts de  $E$ , le nombre de  $k$ -uplets d'éléments de  $E$  ordonnés dans l'ordre strictement croissant.

### Exercice 2

Une entreprise de restauration collective propose trois formules de repas à  $n$  clients ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), chacun des clients choisit de manière indépendante exactement **une** de ces trois formules au hasard et de façon équiprobable puis envoie un bon de commande à l'entreprise. Pour tout  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on note :

- $A_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, une seule formule a été choisie" ;
  - $B_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, exactement deux formules ont été choisies" ;
  - $C_k$  l'événement : "après réception du  $k^{\text{ème}}$  bon, les trois formules ont été choisies" ;
- et  $a_k = P(A_k)$ ,  $b_k = P(B_k)$  et  $c_k = P(C_k)$ .

1. Évaluer  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$ , montrer que  $a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $b_2 = \frac{2}{3}$ ,  $c_2 = 0$  puis déterminer  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $c_3$ .

2. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles  $P_{A_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(A_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(B_{k+1})$ ,  $P_{A_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{B_k}(C_{k+1})$ ,  $P_{C_k}(C_{k+1})$  (avec  $k$  entier supérieur à 3).

3. Montrer que  $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$  avec  $M$  une matrice à expliciter.

4. En déduire une formule exprimant  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  en fonction de  $M$  et  $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$

5. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_n)$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 27

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer le théorème de comparaison.

**Démonstration:** Croissance de l'intégration et inégalité triangulaire.

#### Exercice 1

1. (*Question indépendante*) : Calculer la limite de  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ .
3. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que :  $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ .

#### Exercice 2

Soit  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de  $\sum u_k$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer une relation entre  $\ln(u_n)$  et  $S_{n-1}$ .
2. Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire la nature de la série  $\sum u_k$ .
3. Sans se servir de la question précédente, déterminer la nature de la série  $\sum u_k$  et en déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et sa limite.

## MP2I Sujet 2

Semaine de colle: 27

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Expliquer le concept de fonction continue par morceaux.

**Démonstration:** Montrer que : si  $\sum u_n$  est absolument convergente alors  $\sum u_n$  est convergente.

#### Exercice 1

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. (*Question indépendante*) : Calculer  $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$  et  $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
3. Quelle est la nature de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

#### Exercice 2

On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n^2$ .
3. Déterminer la nature de la série  $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , en déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .
4. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n^p$  suivant les valeurs de  $p$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 27

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

**Démonstration:** Montrer le critère spécial des séries alternées.

#### Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général  $u_n$  convergent avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}.$$

2. Expliciter les sommes des séries de terme général  $u_n$  (Existence ??) avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

#### Exercice 2

1. (*Question indépendante*) : Expliciter  $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \ln \left( 1 + \frac{1}{3^k} \right)$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{n \ln(n)}.$$

3. En déduire la nature de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

4. En déduire un équivalent de la suite des sommes partielles de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 27

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer le théorème de comparaison avec une intégrale.

**Démonstration :** Croissance de l'intégration et inégalité triangulaire.

#### Exercice 1

1. (*Question indépendante*) : Calculer la limite de  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ .
3. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que :  $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ .

#### Exercice 2

Soit  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de  $\sum u_k$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer une relation entre  $\ln(u_n)$  et  $S_{n-1}$ .
2. Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire la nature de la série  $\sum u_k$ .
3. Sans se servir de la question précédente, déterminer la nature de la série  $\sum u_k$  et en déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et sa limite.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 27

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Linéarité de l'intégration, positivité de l'intégration, relation de Chasles, inégalité triangulaire, croissance de l'intégration.

**Démonstration :** Montrer que : si  $\sum u_n$  est absolument convergente alors  $\sum u_n$  est convergente.

#### Exercice 1

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. (*Question indépendante*) : Calculer  $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$  et  $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
3. Quelle est la nature de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

#### Exercice 2

On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n^2$ .
3. Déterminer la nature de la série  $\sum \ln \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ , en déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .
4. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n^p$  suivant les valeurs de  $p$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 27

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.

**Démonstration :** Montrer le critère spécial des séries alternées.

#### Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général  $u_n$  convergent avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}.$$

2. Expliciter les sommes des séries de terme général  $u_n$  (Existence ??) avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

#### Exercice 2

1. (*Question indépendante*) : Expliciter  $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \ln \left( 1 + \frac{1}{3^k} \right)$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{n \ln(n)}.$$

3. En déduire la nature de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

4. En déduire un équivalent de la suite des sommes partielles de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

## MP2I Sujet 1

Semaine de colle: 27

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer le théorème de comparaison avec une intégrale.

**Démonstration :** Croissance de l'intégration et inégalité triangulaire.

#### Exercice 1

1. (*Question indépendante*) : Calculer la limite de  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ .
3. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que :  $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ .

#### Exercice 2

Soit  $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \exp(-u_n).$$

Soit  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles de  $\sum u_k$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer une relation entre  $\ln(u_n)$  et  $S_{n-1}$ .
2. Étudier la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire la nature de la série  $\sum u_k$ .
3. Sans se servir de la question précédente, déterminer la nature de la série  $\sum u_k$  et en déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et sa limite.

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 27

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Linéarité de l'intégration, positivité de l'intégration, relation de Chasles, inégalité triangulaire, croissance de l'intégration.

**Démonstration :** Montrer que : si  $\sum u_n$  est absolument convergente alors  $\sum u_n$  est convergente.

#### Exercice 1

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ .

1. (*Question indépendante*) : Calculer  $\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt$  et  $\int_e^3 \frac{dt}{t \ln(t)}$ .
2. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
3. Quelle est la nature de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

#### Exercice 2

On considère  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite réelle définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série  $\sum u_n^2$ .
3. Déterminer la nature de la série  $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ , en déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .
4. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Déterminer la nature de la série  $\sum u_n^p$  suivant les valeurs de  $p$ .

## MP2I Sujet 3

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 27

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Citer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.  
**Démonstration :** Montrer le critère spécial des séries alternées.

#### Exercice 1

1. Dire si les séries de terme général  $u_n$  convergent avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}.$$

2. Expliciter les sommes des séries de terme général  $u_n$  (Existence ??) avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n!}.$$

#### Exercice 2

1. (*Question indépendante*) : Expliciter  $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \ln \left( 1 + \frac{1}{3^k} \right)$ .

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t \ln(t)} dt \leq \frac{1}{n \ln(n)}.$$

3. En déduire la nature de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

4. En déduire un équivalent de la suite des sommes partielles de  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Sommes de Riemann : définition, résultats ?

**Démonstration:** Démontrer le théorème de comparaison et théorème sur l'utilisation des équivalents pour la convergence des séries positives.

**Exercice 1**

1. (*Question indépendante*) : Calculer la limite de  $\left( \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^{1/n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Démontrer que :  $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)) dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) dx$ .
3. En déduire la valeur de  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx$ .

**Exercice 2**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  et  $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \arctan^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \arctan(x) \leq x$  et en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq v_n$ .
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \geq \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

4. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$  puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - v_n \leq \frac{4}{n}$$

5. En déduire la limite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 28

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer la formule de Taylor avec reste intégral.

**Démonstration:** Sommes de Riemann dans le cas d'une fonction lipschitzienne.

### Exercice 1

1. Dire si  $\sum u_n$  converge avec :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!},$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$

2. Expliciter la somme de  $\sum u_n$  (après avoir prouvé leur existence) avec :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n},$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$

### Exercice 2

Soit  $G$  la fonction définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}$  de définition de  $G$  et montrer que  $G \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ .
2. Donner les variations de  $G$ .
3. Montrer que l'on peut prolonger par continuité  $G$  en 0 en posant  $G(0) = 0$ .
4. Ce prolongement est-il de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0 ?
5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, x \ln \left( \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| \right) \leq G(x) \leq 2x \ln \left( \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| \right)$$

6. En déduire les limites de  $G$  aux bornes de son ensemble de définition ainsi que l'étude des branches infinies de  $G$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 28

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Sommes de Riemann, Séries de Riemann : définition, résultats?

**Démonstration:** Formule de Taylor avec reste intégral.

### Exercice 1

1. Dire si  $\sum u_n$  converge avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

2. Expliciter la somme de  $\sum u_n$  (après avoir prouvé leur existence) avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right).$$

### Exercice 2

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{J_n}{I_n}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire que celle-ci converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

et en déduire l'expression de  $I_n$  ( $n$  entier naturel fixé) en fonction de  $n$ .

3. Montrer que :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ .

4. En déduire la limite de  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication:** Sommes de Riemann : définition, résultats ?

**Démonstration:** Démontrer le théorème de comparaison et théorème sur l'utilisation des équivalents pour la convergence des séries positives.

**Exercice 1**

1. (*Question indépendante*) : Calculer la limite de  $\left( \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^{1/n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Démontrer que :  $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)) dx = \int_0^{\pi/4} \ln \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx$ .
3. En déduire la valeur de  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx$ .

**Exercice 2**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  et  $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \arctan^2 \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \arctan(x) \leq x$  et en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq v_n$ .
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \geq \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

4. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$  puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - v_n \leq \frac{4}{n}$$

5. En déduire la limite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 28

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Citer la formule de Taylor avec reste intégral.

**Démonstration:** Sommes de Riemann dans le cas d'une fonction lipschitzienne.

### Exercice 1

1. Dire si  $\sum u_n$  converge avec :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!},$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$

2. Expliciter la somme de  $\sum u_n$  (après avoir prouvé leur existence) avec :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n},$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$

### Exercice 2

Soit  $G$  la fonction définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}$  de définition de  $G$  et montrer que  $G \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ .
2. Donner les variations de  $G$ .
3. Montrer que l'on peut prolonger par continuité  $G$  en 0 en posant  $G(0) = 0$ .
4. Ce prolongement est-il de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0 ?
5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, x \ln \left( \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| \right) \leq G(x) \leq 2x \ln \left( \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| \right)$$

6. En déduire les limites de  $G$  aux bornes de son ensemble de définition ainsi que l'étude des branches infinies de  $G$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 28

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication:** Sommes de Riemann, Séries de Riemann : définition, résultats?

**Démonstration:** Formule de Taylor avec reste intégral.

### Exercice 1

1. Dire si  $\sum u_n$  converge avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

2. Expliciter la somme de  $\sum u_n$  (après avoir prouvé leur existence) avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right).$$

### Exercice 2

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{J_n}{I_n}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire que celle-ci converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

et en déduire l'expression de  $I_n$  ( $n$  entier naturel fixé) en fonction de  $n$ .

3. Montrer que :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ .

4. En déduire la limite de  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Définition et QC**

**Définition/ Explication :** Citer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

**Démonstration :** Démontrer le théorème de comparaison et théorème sur l'utilisation des équivalents pour la convergence des séries positives.

**Exercice 1**

1. (*Question indépendante*) : Calculer la limite de  $\left( \prod_{k=0}^{n-1} \left( 1 + \frac{k}{n} \right)^{1/n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. Démontrer que :  $\int_0^{\pi/4} \ln(\cos(x)) dx = \int_0^{\pi/4} \ln \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right) dx$ .
3. En déduire la valeur de  $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx$ .

**Exercice 2**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$  et  $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \arctan^2 \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$ .

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge.
2. Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \arctan(x) \leq x$  et en déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq v_n$ .
3. A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \geq \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

4. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - v_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(k+1)^2}$  puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n - v_n \leq \frac{4}{n}$$

5. En déduire la limite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

## MP2I Sujet 2

Sujet disponible sur:

Semaine de colle: 28

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Séries géométriques et télescopiques : définition, résultats ?  
**Démonstration :** Sommes de Riemann dans le cas d'une fonction lipschitzienne.

### Exercice 1

1. Dire si  $\sum u_n$  converge avec :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!},$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$

2. Expliciter la somme de  $\sum u_n$  (après avoir prouvé leur existence) avec :

(a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n},$

(b)  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$

### Exercice 2

Soit  $G$  la fonction définie par :

$$G : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

1. Déterminer l'ensemble  $\mathcal{D}$  de définition de  $G$  et montrer que  $G \in \mathcal{C}^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ .
2. Donner les variations de  $G$ .
3. Montrer que l'on peut prolonger par continuité  $G$  en 0 en posant  $G(0) = 0$ .
4. Ce prolongement est-il de classe  $\mathcal{C}^1$  en 0 ?
5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathcal{D}, x \ln \left( \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| \right) \leq G(x) \leq 2x \ln \left( \left| \frac{\ln(2x)}{\ln(x)} \right| \right)$$

6. En déduire les limites de  $G$  aux bornes de son ensemble de définition ainsi que l'étude des branches infinies de  $G$ .

## MP2I Sujet 3

Semaine de colle: 28

Sujet disponible sur:

[cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback](http://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback)

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Définition et QC

**Définition/ Explication :** Séries alternées : définition, résultats ?

**Démonstration :** Formule de Taylor avec reste intégral.

#### Exercice 1

1. Dire si  $\sum u_n$  converge avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2 + \cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

2. Expliciter la somme de  $\sum u_n$  (après avoir prouvé leur existence) avec :

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}, \quad (b) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right).$$

#### Exercice 2

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t) dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt \quad \text{et} \quad K_n = \frac{J_n}{I_n}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et en déduire que celle-ci converge.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$$

et en déduire l'expression de  $I_n$  ( $n$  entier naturel fixé) en fonction de  $n$ .

3. Montrer que :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$ .

4. En déduire la limite de  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .