

Document de cours - 1er semestre MP2I

Chapitre 0 : Introduction à la physique en MP2I, grandeurs et analyse dimensionnelle

Savoir-Faire 1

Exemples : On note la masse m en kg, la position x , en m, le temps t , en s. Donner les unités des grandeurs suivantes.

- La fréquence (qui s'exprime en Hertz Hz) $f = 1/T$ avec T la période
- Le volume V
- La masse volumique $\rho = m/V$
- La vitesse $v = \frac{dx}{dt}$
- L'accélération $a = \frac{dv}{dt}$
- La force F (qui s'exprime en Newton N), par exemple le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ avec g l'accélération de la pesanteur
- L'énergie (qui s'exprime en Joule J), par exemple l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$
- La pression (qui s'exprime en Pascal Pa) $p = F/S$ avec S une surface
- La puissance (qui s'exprime en Watt W) $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Savoir-Faire 2

Exemple : La fréquence f d'une note jouée par une corde de guitare dépend à priori de la longueur L de cette corde, de sa tension T (qui est une force), et de sa masse volumique ρ . On pose donc

$$f = kL^\alpha \rho^\beta T^\gamma \quad (1)$$

Déterminer α , β , γ .

Savoir-Faire 3

Pour noter une valeur numérique, on utilise lorsque c'est pertinent la notation scientifique, au lieu d'écrire $t = 10\,000\text{ s}$ on écrit $t = 1,0 \times 10^4\text{ s}$.

- Convertir 1 m^3 en L
- Convertir 10 ns en s
- Convertir $1,9\text{ MW}$ en W
- Convertir 20°C en K
- Convertir 80° en rad

Savoir-Faire 4

Pour noter une valeur numérique, on utilise lorsque c'est pertinent la notation scientifique, au lieu d'écrire $t = 10\,000\text{ s}$ on écrit $t = 1,0 \times 10^4\text{ s}$.

- Convertir 1 m^3 en L
- Convertir 10 ns en s
- Convertir $1,9\text{ MW}$ en W
- Convertir 20°C en K
- Convertir 80° en rad

Savoir-Faire 5

Connaître absolument :

- Aire, périmètre d'un cercle de rayon r
- Surface et volume d'une sphère de rayon r
- Surface latérale d'un cylindre de hauteur h de rayon r
- Formules de trigonométrie $\cos$ / $\sin$ / $\tan$

Partie A : Optique Géométrique

Chapitre A1 : Lois de l'optique géométrique

Savoir-Faire 1

Lorsqu'un rayon atteint un milieu moins réfringent, le rayon réfracté n'existe que si l'angle incident est inférieur à $i_{1,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$. Si $i_1 > i_{1,\text{lim}}$, il y a *réflexion totale*.

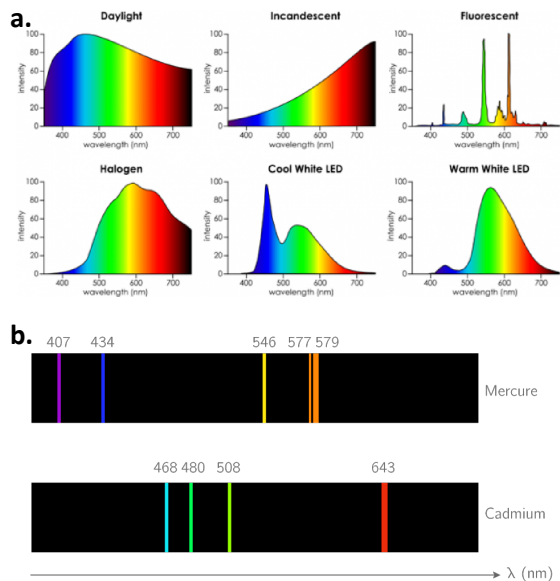


FIGURE 1 – Spectres de sources lumineuses, **a.** sources thermiques et spectres continus; **b.** sources atomiques et spectres discrets.

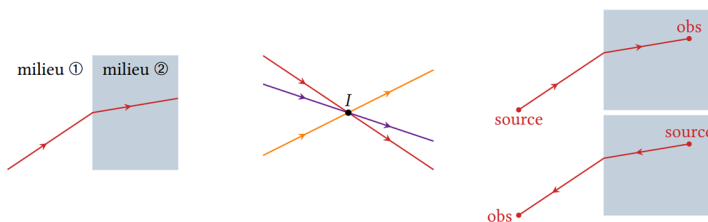


FIGURE 2 – Schéma illustrant les propriétés des rayons lumineux

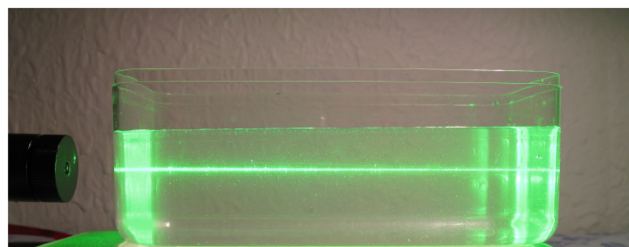


FIGURE 3

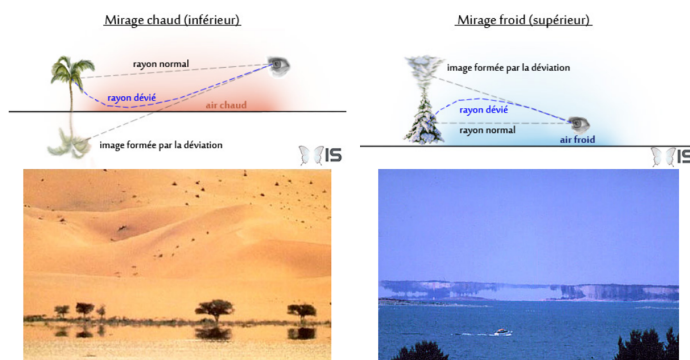


FIGURE 4 – Mirages chaud et froid

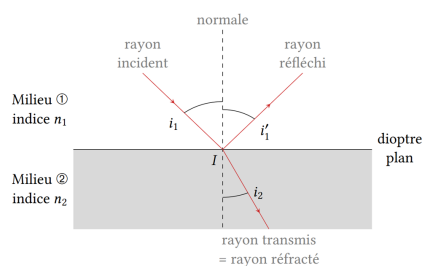


FIGURE 5 – Dioptré et plan d'incidence

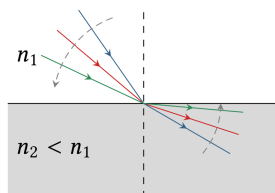


FIGURE 6

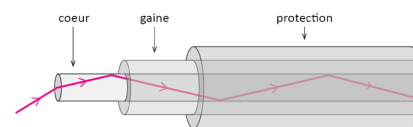


FIGURE 7 – Schéma d'une fibre à saut d'indice

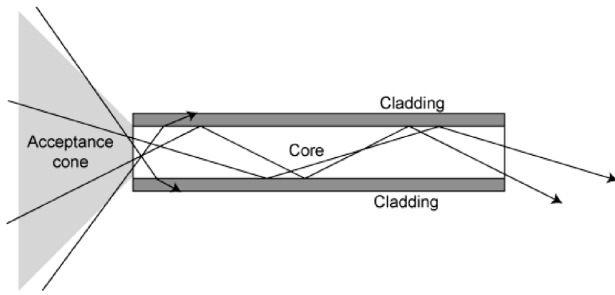


FIGURE 8 – Cône d'acceptance d'une fibre optique

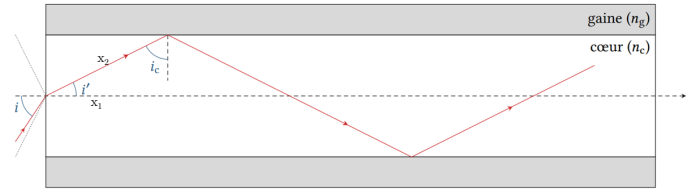


FIGURE 9

Savoir-Faire 2

En s'appuyant sur la figure 9, en utilisant la condition de réflexion totale et la relation de Snell-Descartes, on trouve l'expression du cône d'acceptance et de l'ouverture numérique de la fibre optique

$$\sin i < \sqrt{n_c^2 - n_g^2} = ON \iff \theta = \arcsin\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right) \quad (2)$$

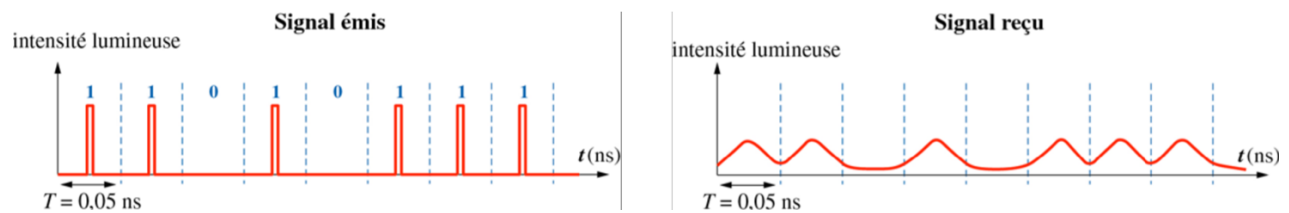


FIGURE 10 – Principe de la dispersion intermodale

Chapitre A2 : Lentilles et formations d'images

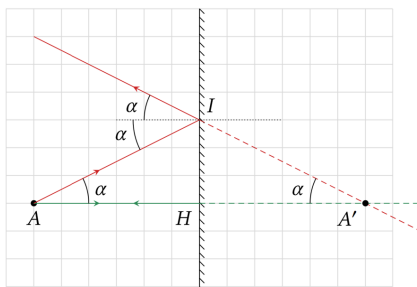


FIGURE 1 – Image d'un objet par un miroir plan

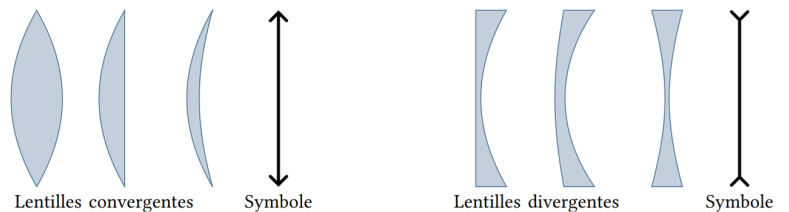


FIGURE 2 – Lentille convergente, divergente

Savoir-Faire 1

Dans chaque cas (figures 5 et 6), construire l'image, et si c'est pertinent, dire si l'image est à l'endroit, plus grande ou plus petite que l'objet.

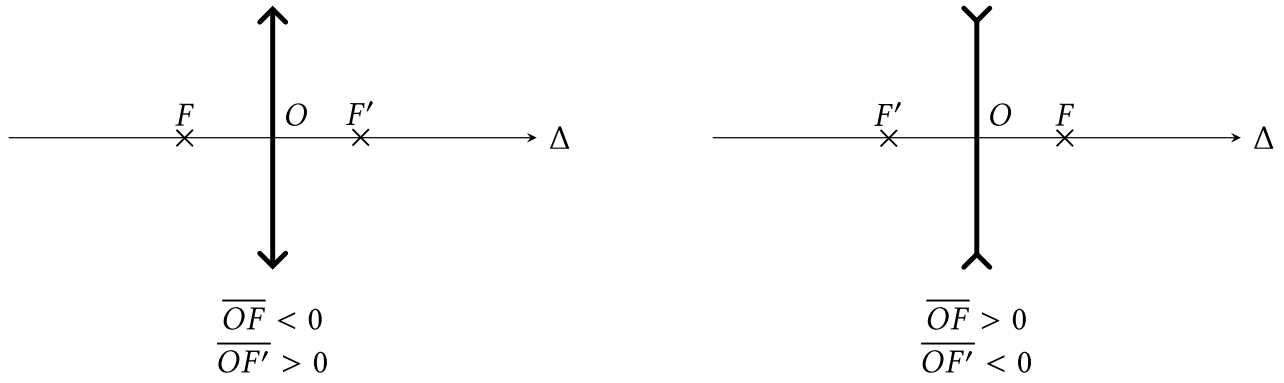


FIGURE 3 – Points et rayons particuliers des lentilles convergentes et divergentes

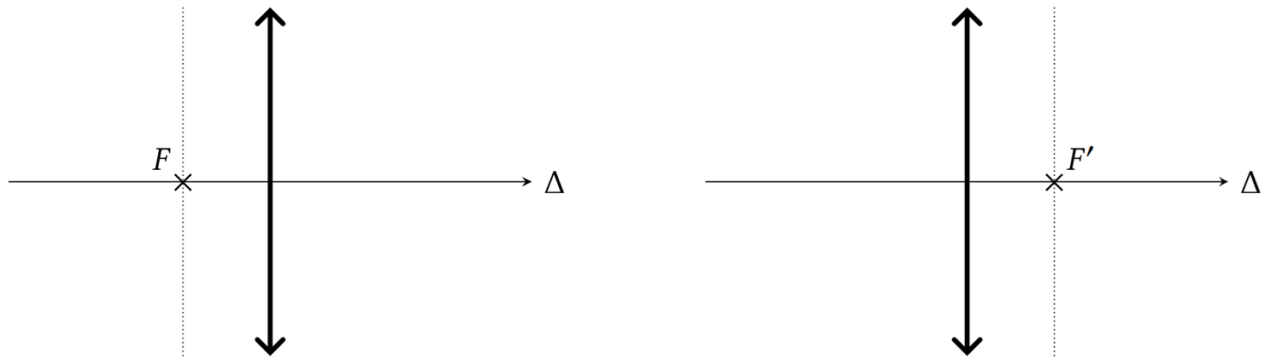


FIGURE 4 – Plan focal image et plan focal objet

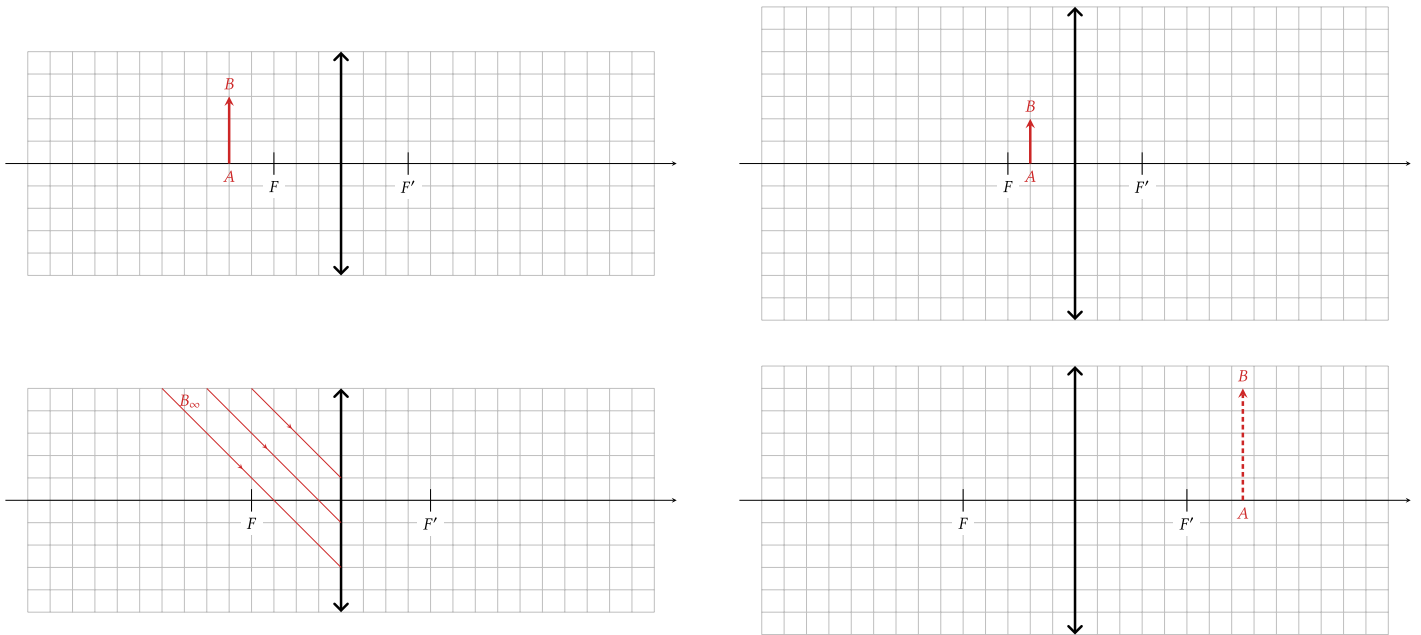


FIGURE 5 – Construction d'image par une lentille convergente

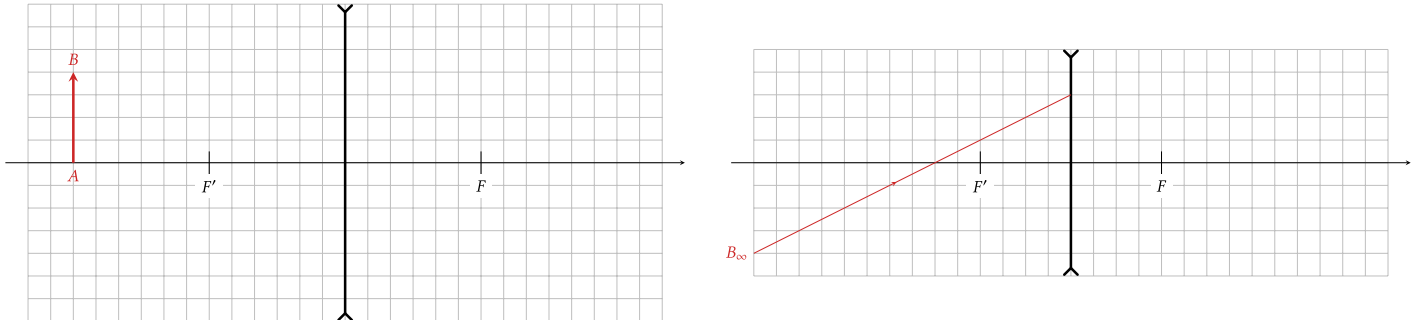


FIGURE 6 – Construction d'image par une lentille divergente

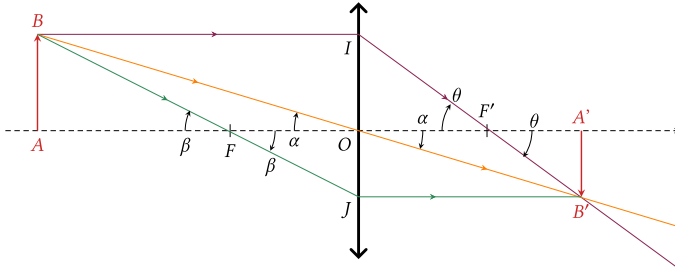


FIGURE 7 – Formation d'une image réelle par une lentille convergente

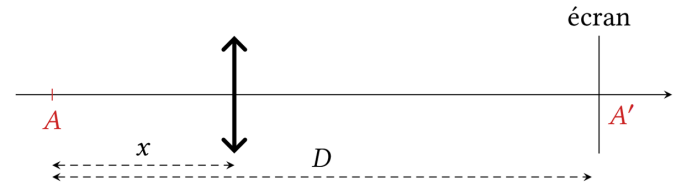


FIGURE 8 – Formation d'une image sur un écran à distance connue

Savoir-Faire 2

On montre que dans le cas de la figure 7

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \quad (3)$$

Savoir-Faire 3

En faisant un produit en croix dans la relation de grandissement on obtient

$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = -f'^2 \quad (4)$$

Savoir-Faire 4

En introduisant le centre optique O dans la relation précédente, on obtient la relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad (5)$$

Savoir-Faire 5

Une lentille convergente ne permet de former l'image d'un objet sur un écran à distance fixée D si et seulement si sa focale vérifie

$$f' \leq \frac{D}{4} \quad (6)$$

Dans ce cas là, deux positions de la lentille peuvent convenir.

Chapitre A3 : Instruments d'optique

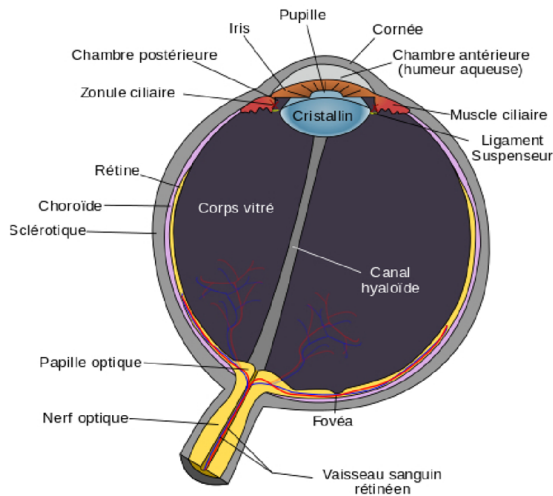


FIGURE 1 – Schéma anatomique de l'œil humain

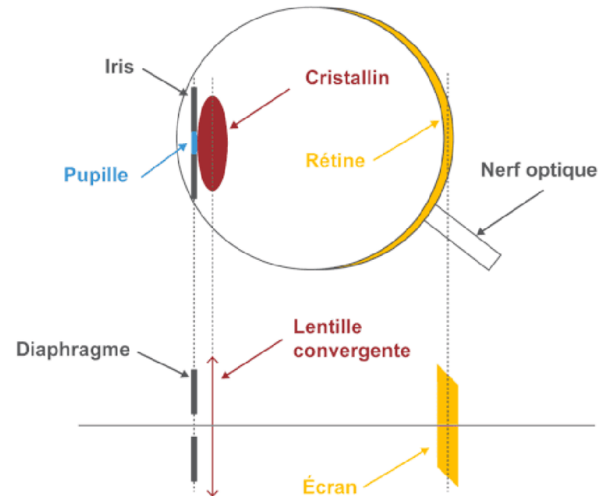


FIGURE 2 – Modélisation de l'œil en système optique

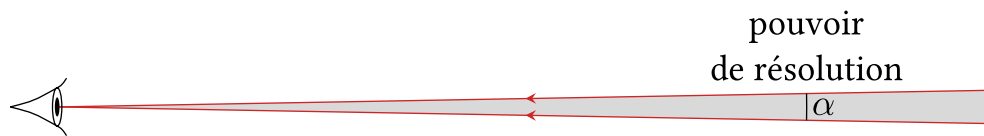


FIGURE 3 – La limite de résolution de l'œil α , les points à l'intérieur de la zone grisée ne sont pas discernables les uns des autres, ils seront interprétés comme un seul et unique point.

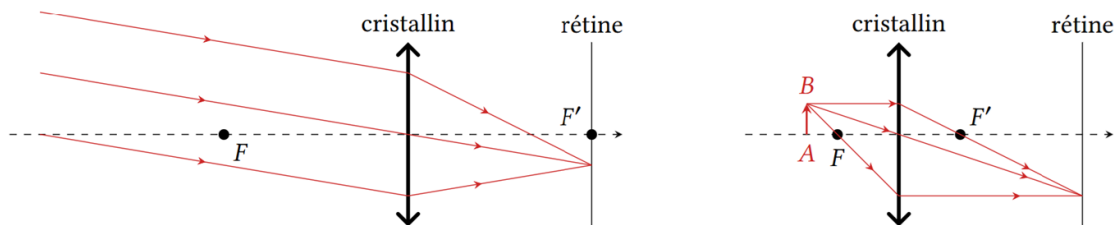


FIGURE 4 – Modélisation de la formation d'images sur l'œil pour un objet placé à l'infini, et pour un objet à distance finie.

Savoir-Faire 1

On retient que la lunette est un dispositif **afocal** : elle forme l'image à l'infini d'un objet à l'infini. Le plan focal objet de l'oculaire est confondu avec le plan focal image de l'objectif. Le but de la lunette est d'augmenter le diamètre apparent de l'objet. La grandeur d'intérêt est alors le grossissement G de la lunette.

On trouve

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} \simeq -10 \quad (7)$$

L'image vue par la lunette est donc renversée et grossie environ 10 fois.

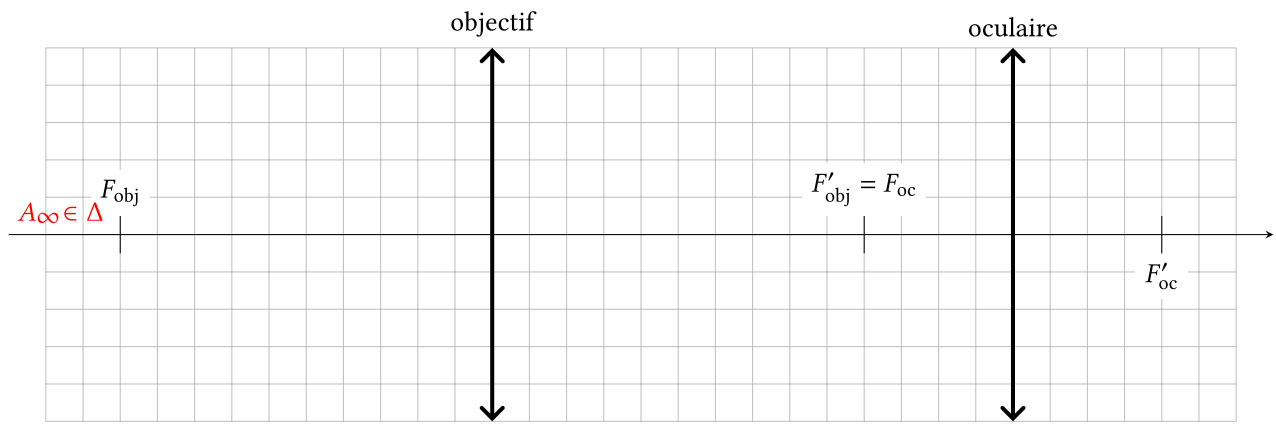


FIGURE 5 – Schéma d'une lunette astronomique

Partie B : Mécanique du point

Chapitre B1 : Cinématique

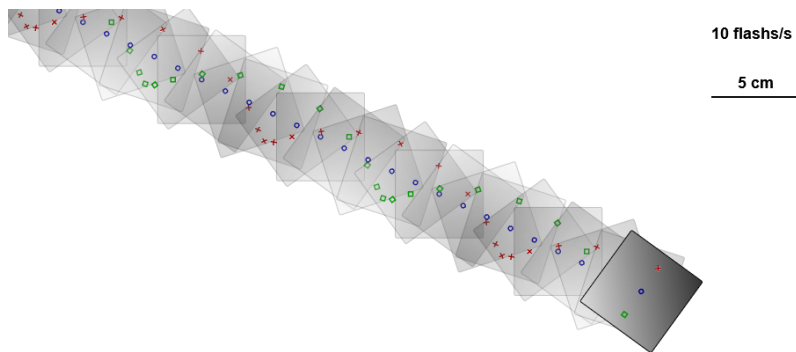


FIGURE 1 – Position d'un cube en translation et rotation au cours du temps. Le centre de masse du cube est le point bleu.

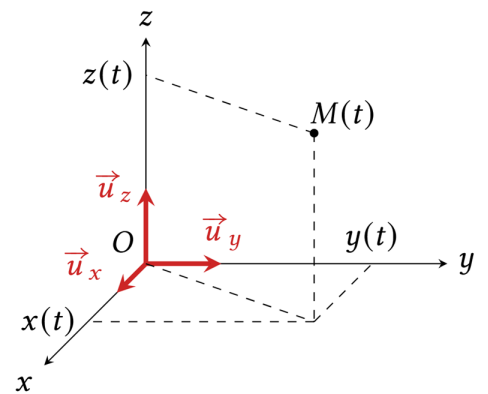


FIGURE 2 – Vecteur position et coordonnées cartésiennes

Savoir-Faire 1

En coordonnées cartésiennes on a donc

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z \quad (8)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \vec{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{u}_z = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z \quad (9)$$

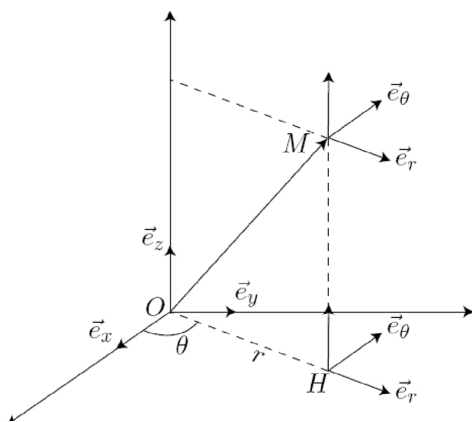


FIGURE 3 – Système de coordonnées cylindriques

Savoir-Faire 2

La dérivée temporelle des vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ est

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad ; \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_r \quad (10)$$

Savoir-Faire 3

Finalement, le vecteur vitesse en coordonnées cylindrique s'exprime

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z \quad (11)$$

Pour "retrouver" cette formule plus rapidement on peut s'aider de l'homogénéité : si on faisait "comme en cartésiennes" on aurait juste $\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ ce qui n'est pas homogène à une vitesse au contraire de $r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

Savoir-Faire 4

Le vecteur accélération en coordonnées cylindriques s'exprime comme

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z \quad (12)$$

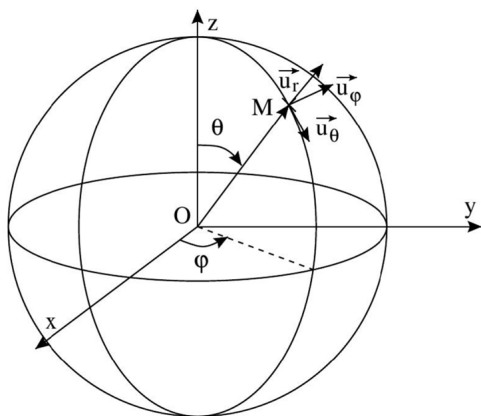


FIGURE 4 – Système de coordonnées sphériques

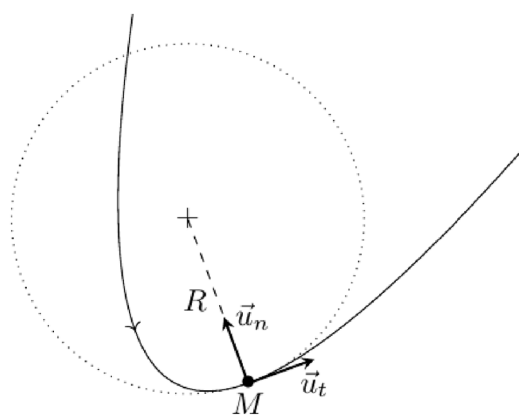


FIGURE 5 – Base de Frénet

Savoir-Faire 5

Pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré (de norme a , selon l'axe x), le point matériel ayant une vitesse initiale $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ et se trouvant à l'origine du repère à $t = 0$, on trouve

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \quad (13)$$

Pour un mouvement circulaire uniforme, on se place en coordonnées cylindriques pour déduire

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad ; \quad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r \quad (14)$$

Chapitre B2 : Dynamique

Savoir-Faire 1

Une balle de masse m est lancée depuis le sol avec une vitesse initiale v_0 formant un angle α avec l'horizontale. On néglige tout les frottements. Les équations horaires sont finalement

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \quad ; \quad z(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (15)$$

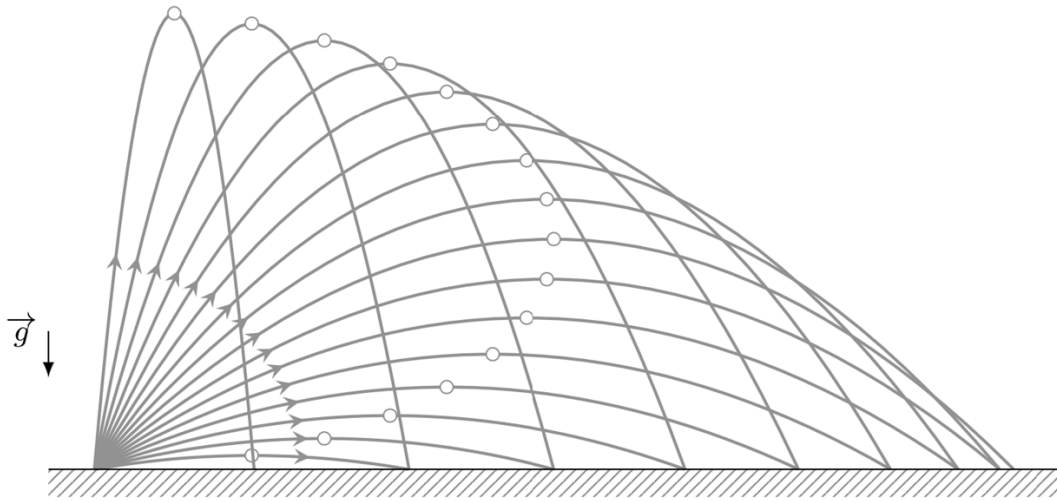


FIGURE 1 – Différentes trajectoires de la balle. La courbe enveloppant toutes ces trajectoires est appelée "parabole de sûreté", en dehors de cette parabole on est surs de ne pas pouvoir être touchés par le tir.

Savoir-Faire 2

On considère une balle de masse m que l'on laisse tomber verticalement, sans vitesse initiale. On note sa vitesse $\vec{v}$, la balle subit lors de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Après résolution de l'équation différentielle, la vitesse de la balle est donnée par

$$v(t) = -\frac{mg}{\alpha}(1 - \exp(-t/\tau)) = v_l(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (16)$$

la vitesse de la balle tend vers la vitesse limite.

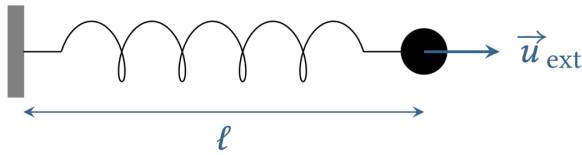


FIGURE 2 – Système masse-ressort

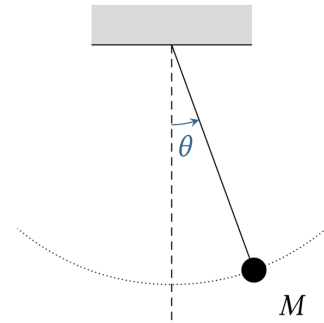


FIGURE 3 – Pendule simple

Savoir-Faire 3

La position d'une masse attachée à un ressort de longueur à vide l_0 de raideur k , lâchée initialement de la position $x_0 + l_0$ et sans vitesse est

$$x(t) = l_0 + x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (17)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. La période des oscillations est donc

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (18)$$

Savoir-Faire 4

Les oscillations d'un pendule simple lâché sans vitesse initiale depuis l'angle θ_0 , dans l'approximation des petits angles sont décrites par

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (19)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (20)$$

Chapitre B3 : Énergétique

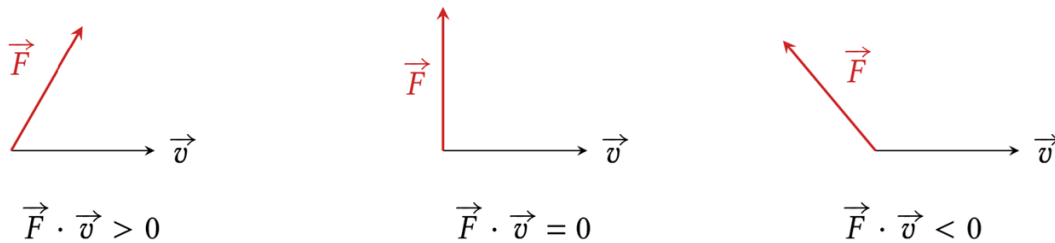


FIGURE 1 – Orientations relatives possibles de $\vec{F}$ et $\vec{v}$.

Savoir-Faire 1

- Si $\vec{F} \cdot \vec{v} > 0 \iff \mathcal{P} > 0 \iff \delta W > 0$, la force augmente l'énergie cinétique du système : la force est **motrice**. L'accélération est globalement dans le même sens que la vitesse.
- Si $\vec{F} \cdot \vec{v} < 0 \iff \mathcal{P} < 0 \iff \delta W < 0$, la force diminue l'énergie cinétique du système : la force est **résistive**. L'accélération est globalement dans le sens opposé de la vitesse.
- Si $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \iff \mathcal{P} = 0 \iff \delta W = 0$, la force ne change pas l'énergie cinétique du système : on dit qu'elle ne **travaille pas**. L'accélération et la vitesse sont orthogonales, l'orientation de $\vec{v}$ change mais non sa norme (comme dans le cas du mouvement circulaire uniforme).

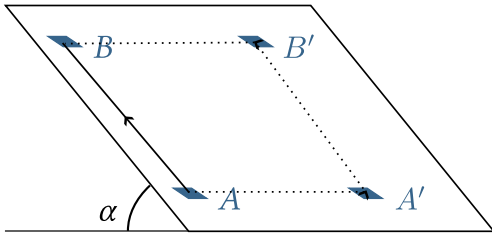


FIGURE 2 – Exemples de trajectoires d'un point matériel sur un plan incliné

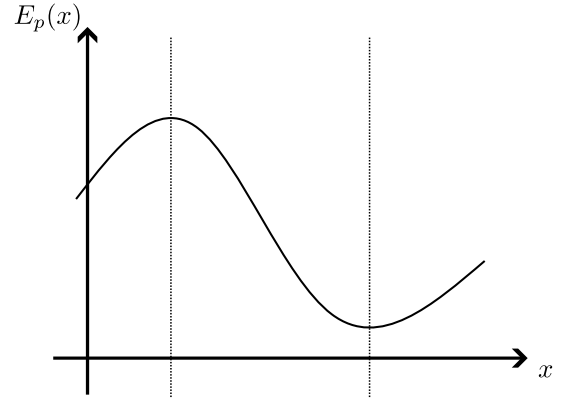


FIGURE 3 – Exemple de courbe d'énergie potentielle pour un problème unidimensionnel selon l'axe x .

Savoir-Faire 2

Ainsi le travail d'une force peut dépendre de la trajectoire : dans le cas de frottements solides de norme constante T , on trouve pour la première trajectoire

$$W_{\hat{A}B_1}(\vec{T}) = \int_{\hat{A}B_1} \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_{y'=0}^{y'=L} -T\vec{e}_{y'} \cdot dy'\vec{e}_{y'} = -TL \quad (21)$$

et pour la seconde

$$W_{\hat{A}B_2}(\vec{T}) = \int_{\hat{A}B_2} \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_A^{A'} -T\vec{e}_{x'} \cdot dx'\vec{e}_{x'} + \int_{A'}^{B'} -T\vec{e}_{y'} \cdot dy'\vec{e}_{y'} + \int_{B'}^B T\vec{e}_{x'} \cdot (-dx'\vec{e}_{x'}) = -3TL \quad (22)$$

Savoir-Faire 3

Théorème de l'énergie cinétique : Pour un point matériel se déplaçant selon la trajectoire $\hat{A}\hat{B}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation d'énergie cinétique entre les points A et B est égale aux travaux des forces le long de la trajectoire

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i). \quad (23)$$

On peut également écrire le théorème (équivalent) de la **puissance cinétique**, qui est une version instantanée, nous disant que la variation d'énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen est donné par la somme des puissances des forces

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \quad (24)$$

Savoir-Faire 4

En mettant le travail élémentaire du poids sous la forme d'une différentielle, on trouve par identification l'énergie potentielle de pesanteur est

$$E_{pp} = mgz + \text{cste} \quad (25)$$

Plus le point matériel est haut en altitude, plus il a une énergie potentielle de pesanteur importante. Avec un axe z orienté vers le bas on aurait trouvé

$$E_{pp} = -mgz + \text{cste}. \quad (26)$$

Savoir-Faire 5

L'énergie potentielle élastique associé à un ressort de raideur k , de longueur à vide l_0 est

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 \quad (27)$$

où on a choisi $E_p(x = l_0) = 0$. Cette énergie potentielle est d'autant plus forte que le ressort est comprimé ou étiré.

Savoir-Faire 6

L'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse m dans le champ de pesanteur de la masse m_0 placée à l'origine d'un repère sphérique est

$$E_p(r) = -G \frac{m_0 m}{r} \quad (28)$$

elle est nulle en $r \rightarrow +\infty$ et tend vers $-\infty$ pour $r \rightarrow 0$.

Savoir-Faire 7

Le théorème de l'énergie mécanique nous dit que dans un référentiel galiléen, les variations d'énergie mécaniques sont dues aux travaux des forces non conservatives

$$\Delta E_m = \sum W_{AB}(\vec{F}_{nc}) \quad (29)$$

ce qui peut s'écrire également en version puissance (théorème de la puissance mécanique)

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) \quad (30)$$

Ainsi, lorsqu'un système est soumis à un ensemble de forces uniquement conservatives, **l'énergie mécanique du système se conserve**. C'est cela que nous utiliserons le plus souvent.

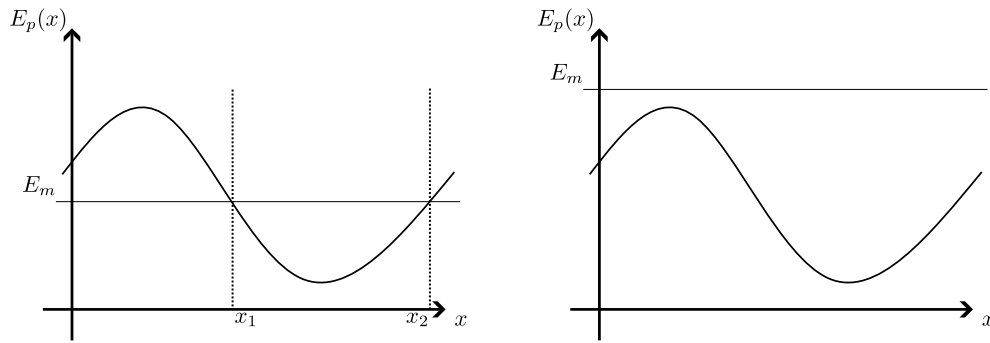


FIGURE 4 – Comparaison entre énergie mécanique et potentielle, pour un problème à une dimension selon l'axe x .

Savoir-Faire 8

On s'intéresse dans un premier temps au cas de gauche de la figure 4.

- Pour $x \in [x_1, x_2]$, on a $E_m \geq E_p$, le mouvement est possible car le système possède de l'énergie cinétique.
- Les zones $] -\infty; x_1[$ et $]x_2, +\infty[$ sont **inaccessibles**.
- En x_1 et x_2 , $E_m = E_p$ donc $E_c = 0$: la vitesse est nulle, le système fait "demi-tour".

Ainsi dans ce cas là la trajectoire de notre système est **bornée** entre x_1 et x_2 , le mouvement est **périodique**.

Dans le cas de droite, $\forall x$, $E_m > E_p$: la trajectoire n'est pas bornée, tout l'espace est accessible. On parle d'état libre ou de diffusion. Dans ce cas là, aucun mouvement périodique n'est possible.

Savoir-Faire 9

Une **position d'équilibre** correspond à un **extremum** d'énergie potentielle

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{\text{eq}}} = 0 \quad (31)$$

Cette position d'équilibre est **stable** pour un **minimum** d'énergie potentielle. Elle est **instable** pour un **maximum** d'énergie potentielle.

Chapitre B4 : Mouvement dans un champ électromagnétique

Savoir-Faire 1

L'abscisse x d'une particule de charge q et masse m , initialement au repos dans un champ électrique de norme E uniforme et constant est

$$x(t) = \frac{qE}{2m} t^2 \quad (32)$$

Ce problème est similaire à celui de la chute libre, on a un mouvement uniformément accéléré.



FIGURE 1 – Sens de la force de Lorentz magnétique en fonction du signe de q

Savoir-Faire 2

Une particule de charge q plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et constant, possédant une vitesse initiale $\vec{v}_0$ orthogonale au champ magnétique a un mouvement **circulaire uniforme** de rayon

$$R = \frac{mv_0}{qB} \quad (33)$$

parcouru à la vitesse angulaire

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (34)$$

Cette vitesse angulaire est appelée **pulsation cyclotron** (le rayon est également appelé rayon cyclotron). Ces noms proviennent des dispositifs *cyclotrons*, accélérateurs à particules utilisant cette trajectoire.

Savoir-Faire 3

Un champ magnétique **dévie** la trajectoire de particules chargées mais ne change pas la norme de leur vitesse.

Partie C : Électrocinétique

Chapitre 1 : Bases de l'électrocinétique

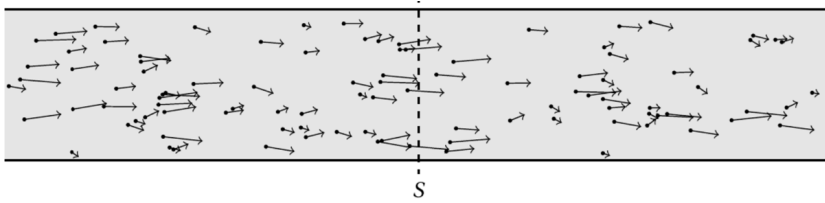


FIGURE 1 – Exemple de déplacement de charges libres dans un conducteur

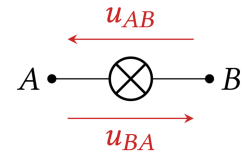


FIGURE 2 – Tension entre deux points d'un circuit, $u_{BA} = -u_{AB}$.

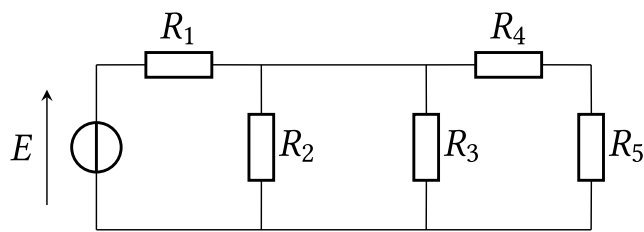


FIGURE 3 – Exemple de schéma d'un circuit électrique contenant plusieurs dipôles.

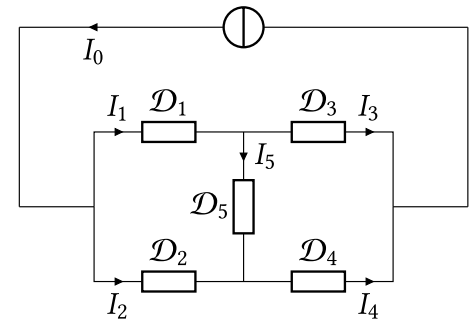


FIGURE 4 – Exemple de schéma de circuit

Savoir-Faire 1

Sur le circuit de la figure 4 on mesure $I_0 = 4\text{ A}$ et $I_1 = 1\text{ A}$ et $I_4 = 2\text{ A}$. Les dipôles $\mathcal{D}$ sont a priori inconnus. Déterminer I_2 , I_3 , I_4 .

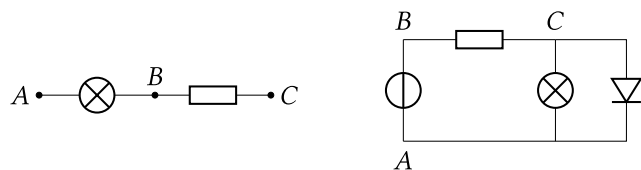


FIGURE 5

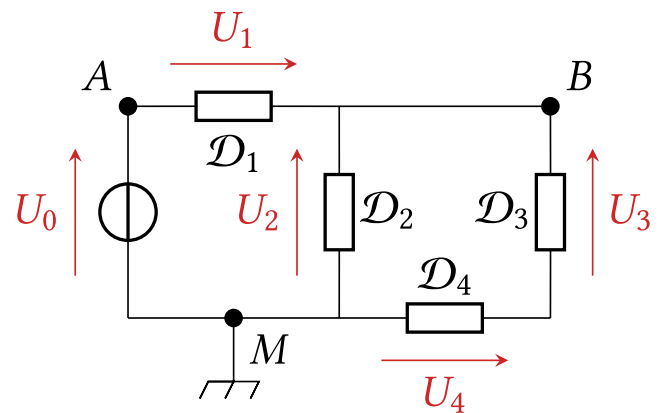


FIGURE 6 – Exemple d'utilisation de la loi des mailles

Savoir-Faire 2

On se réfère au circuit de la figure 6. On mesure $U_0 = 5\text{ V}$, $U_2 = 1\text{ V}$, $U_3 = 3\text{ V}$. Le point M est à la masse, on a donc $V_M = 0\text{ V}$.

- Déterminer U_1 et U_4
- Déterminer le potentiel des nœuds A et B .



FIGURE 7 – Convention récepteur et convention générateur

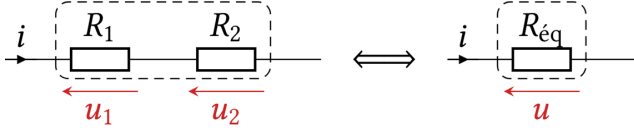


FIGURE 8 – Résistance équivalente pour des résistances placées en série

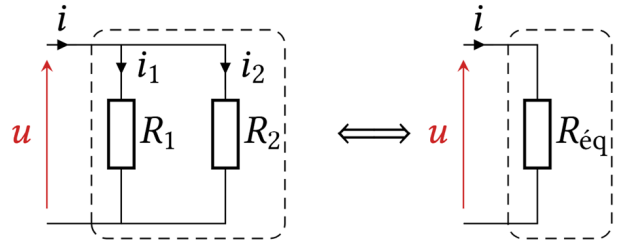


FIGURE 9 – Résistance équivalente pour des résistances placées en parallèle

Savoir-Faire 3

La résistance équivalente à deux résistances R_1 et R_2 placées en série (figure 8) est

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \quad (35)$$

La résistance équivalente à deux résistances R_1 et R_2 placées en parallèle (figure 9) est donnée par

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (36)$$

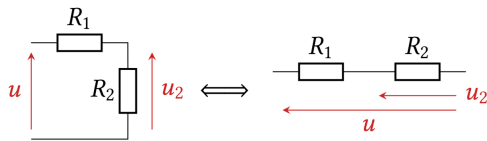


FIGURE 10 – Pont diviseur de tension

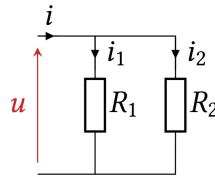


FIGURE 11 – Pont diviseur de courant

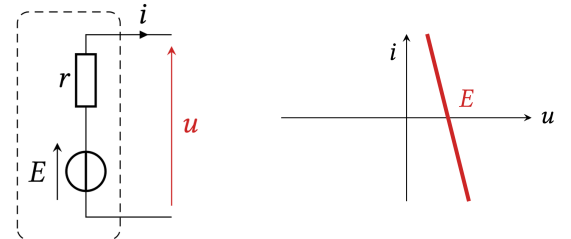


FIGURE 12 – Modèle de Thévenin d'un générateur linéaire et sa caractéristique.

Savoir-Faire 4

Si on place deux résistances R_1 et R_2 en série, u étant la tension aux bornes de l'ensemble, un pont diviseur de tension (figure 10) donne

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u \quad ; \quad u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u \quad (37)$$

Les tensions u_1 et u_2 sont bien plus petites que u d'où le nom "pont diviseur".

De même, un pont diviseur de courant (figure 11) donne

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad ; \quad i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad (38)$$

Chapitre C2 : Circuits du premier ordre

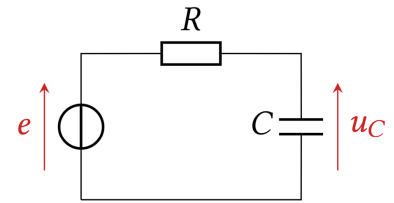
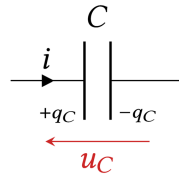
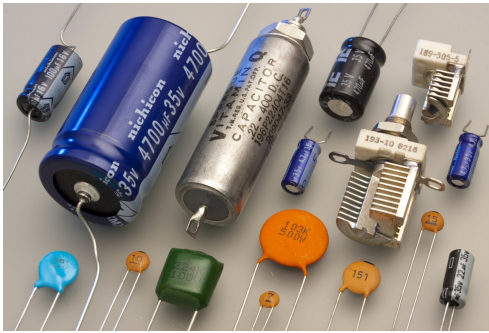


FIGURE 2 – Circuit RC

FIGURE 1 – À gauche, divers condensateurs ; à droite schéma électrique d'un condensateur de capacité C orienté en convention récepteur.

Savoir-Faire 1

Dans un circuit RC alimenté par un échelon de tension e , la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{e}{\tau} \quad (39)$$

avec $\tau = RC$, et la tension est

$$u_C(t) = e(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (40)$$

on appelle cela la **charge du condensateur**.

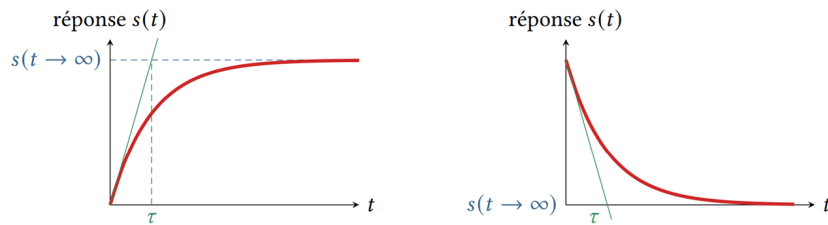


FIGURE 3 – Temps caractéristique τ et régime transitoire.

Savoir-Faire 2

On considère un circuit RC, sans générateur, où le condensateur est chargé $u_C(t \leq t_1) = e$. À $t = t_1$ on ferme l'interrupteur, le condensateur commence alors à se décharger dans la résistance. Finalement

$$u_C(t) = e \exp\left(\frac{t_1 - t}{\tau}\right) \quad (41)$$

la décharge se fait également sur le même temps caractéristique τ , charge et décharge du condensateur sont symétriques (figure 3).

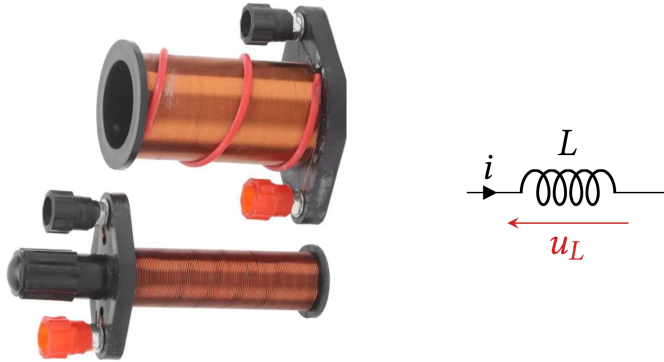


FIGURE 4 – Photo de deux bobines à gauche, schéma d'une bobine d'inductance L à droite.

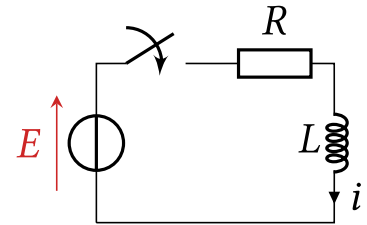


FIGURE 5 – Circuit RL

Savoir-Faire 3

Le courant dans un circuit RL soumis à un échelon de tension E est

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (42)$$

Ce qui est très similaire à ce que l'on avait trouvé pour la charge du condensateur : un régime transitoire d'une durée approximativement égale à τ puis un régime permanent où le courant traversant la bobine reste constant.

Chapitre C3 : Circuits du second ordre

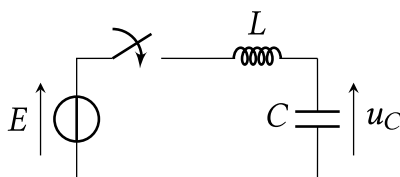


FIGURE 1 – Circuit LC série

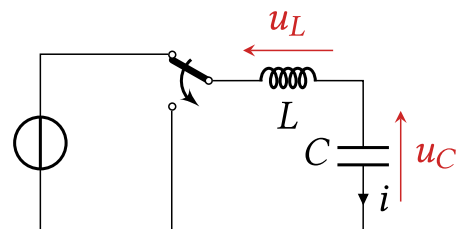


FIGURE 2 – Circuit LC découplé du générateur à partir de $t \geq 0$.

Savoir-Faire 1

La forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E \quad (43)$$

La solution générale de l'équation homogène de l'oscillateur harmonique est

$$u_H(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (44)$$

Savoir-Faire 2

La tension aux bornes du condensateur dans un circuit LC soumis à un échelon de tension E (figure 1) vérifie une équation d'oscillateur harmonique

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E \quad (45)$$

où $\omega_0 = \sqrt{LC}$ est la pulsation propre de l'oscillateur. La tension u_C au cours du temps est

$$u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t)) \quad (46)$$

Savoir-Faire 3

En effectuant un bilan de puissance / d'énergie sur le circuit de la figure 2, on trouve que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u_C^2 \right) = 0 \implies \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C = \text{cste} \quad (47)$$

Les oscillations d'un oscillateur harmonique traduisent une conservation de l'énergie : l'énergie oscille ici entre forme électrique (dans le condensateur) et forme magnétique (dans la bobine). C'est la même chose dans un système masse-ressort où elle oscille entre énergie cinétique et énergie potentielle élastique.

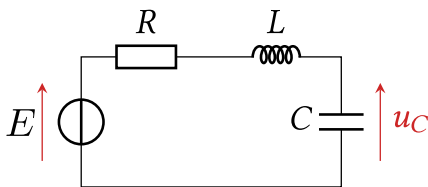


FIGURE 3 – Circuit RLC série alimenté par un échelon de tension E

exemples d'allure
de $u_H(t)$

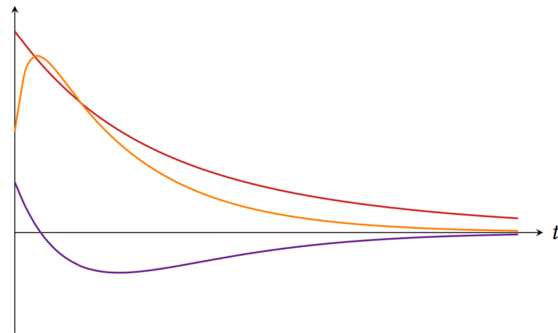


FIGURE 4 – Exemples d'allure de la solution homogène en régime apériodique

Savoir-Faire 4

La tension aux bornes du condensateur dans un circuit RLC (figure 3) vérifie l'équation suivante

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E \quad (48)$$

On met cette équation sous sa **forme canonique** :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = E \quad (49)$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ est la **pulsation propre** et Q le **facteur de qualité**. On identifie Q

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \implies Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (50)$$

Savoir-Faire 5

En régime apériodique, $Q < 1/2$, les racines du polynôme caractéristique sont réelles et valent

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}) \quad (51)$$

Le solution de l'équation homogène est

$$u_H(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t) \quad (52)$$

les constantes A et B se déterminant à partir des conditions initiales, appliquées à la **solution complète** (contenant le solution particulière). Des exemples d'allures de la solution homogène sont données figure 4.

Savoir-Faire 6

En régime apériodique, le régime transitoire est d'autant plus long que le facteur de qualité est faible (ce qui correspond à un fort amortissement).

Savoir-Faire 7

En régime pseudo-périodique, $Q > 1/2$, les racines du polynôme caractéristique sont complexes et s'écrivent

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega_p \quad (53)$$

où τ est le **temps caractéristique d'amortissement** et ω_p la pseudo-pulsation.

Savoir-Faire 8

En régime pseudo-périodique, la forme générale des solutions homogènes est

$$u_H(t) = (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)) \exp(-t/\tau) \quad (54)$$

La solution **oscille** bien à la pulsation ω_p et est **amortie** avec le temps caractéristique τ . Les constantes A et B sont déterminées à l'aide des conditions initiales appliquées à la **solution complète**. Un exemple d'allure est donné sur la figure 5.

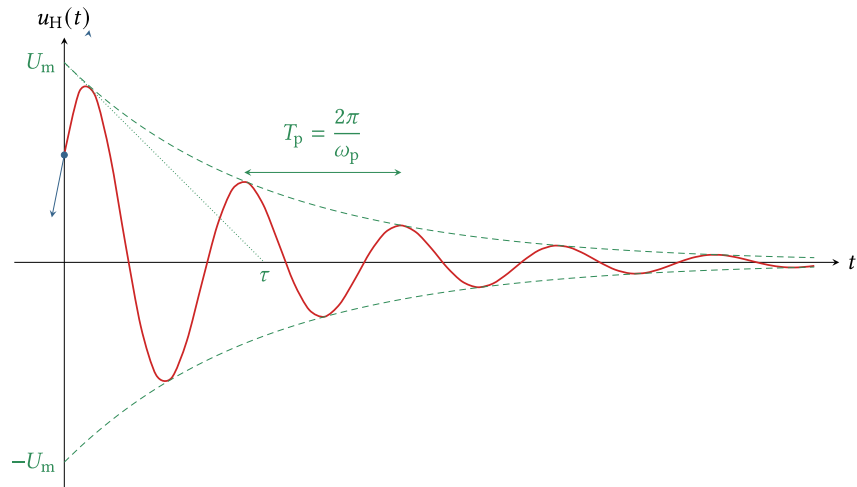


FIGURE 5 – Exemple d'allure de la solution homogène en régime pseudo-périodique.

Partie D : Ondes

Propagation, interférences et diffraction

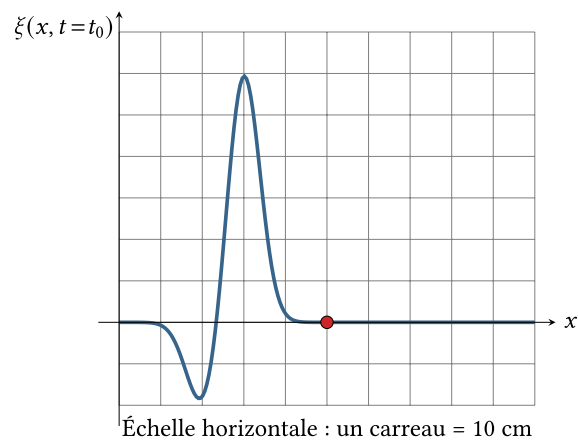


FIGURE 1 – Représentation spatiale d'une onde

Savoir-Faire 1

Une onde plane progressive se déplaçant vers les x croissants à la célérité c peut s'écrire

$$\xi(x, t) = f(x - ct) = F(t - x/c) \quad (55)$$

Une onde plane progressive se déplaçant vers les x décroissants à la célérité c peut s'écrire

$$\xi(x, t) = g(x + ct) = G(t + x/c) \quad (56)$$

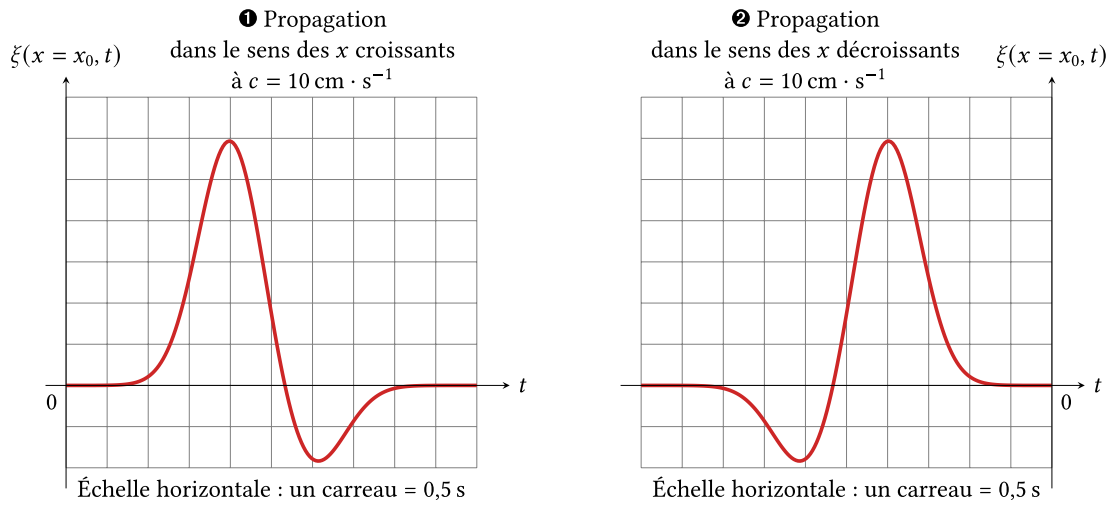


FIGURE 2 – Chronogrammes obtenus

Savoir-Faire 2

La période temporelle d'une OPPH est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (57)$$

en notant f la fréquence de l'onde s'exprimant en $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$.

La période spatiale d'une OPPH est appelée longueur d'onde λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (58)$$

La relation de dispersion nous impose

$$\lambda = cT = \frac{c}{f} \quad (59)$$

Savoir-Faire 3

L'amplitude d'une onde émise en S dans un milieu d'indice n arrivant en un point M est

$$a(M, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(SM) + \varphi\right) \quad (60)$$

où λ est la longueur d'onde **dans le vide**. Le déphasage dû à la propagation est donc

$$\Phi(M) = -\frac{2\pi}{\lambda}(SM) \quad (61)$$

Savoir-Faire 4

L'intensité résultant de la superposition de deux OPPH de même pulsation ω , émises depuis les points S_1 et S_2 est donnée par la **formule de Fresnel** pour les interférences lumineuses

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Phi_1(M) - \Phi_2(M)) \quad (62)$$

qu'on peut réécrire

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} [(S_2 M) - (S_1 M)]\right) \quad (63)$$

ou encore

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \delta\right) \quad (64)$$

avec $\delta = (S_2 M) - (S_1 M)$ la **différence de marche** au point M (qui s'exprime en mètres m). Cette formule peut s'utiliser sans démonstration et doit donc être connue parfaitement .

Savoir-Faire 5

On définit pour un point M l'**ordre d'interférences** $p(M)$ comme

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} \quad (65)$$

Si p est un entier, les interférences sont constructives, si p est un demi-entier alors elles sont destructives.

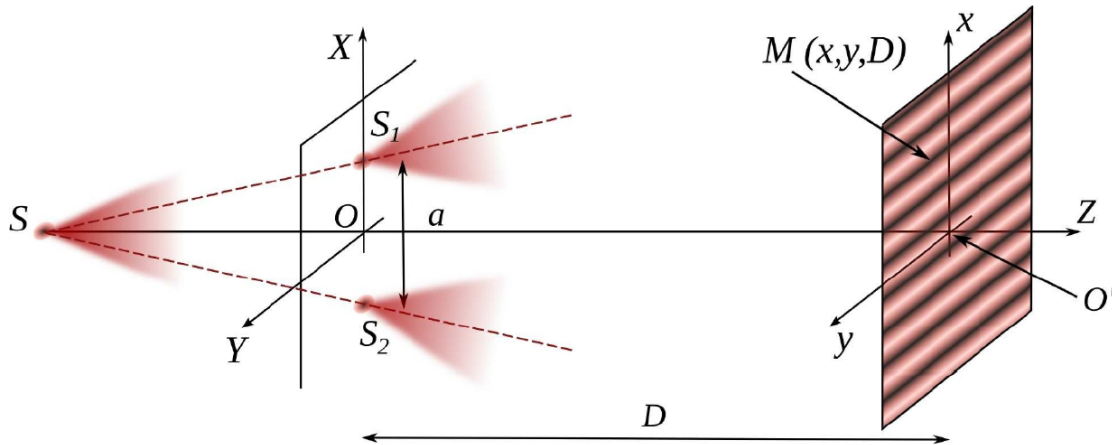


FIGURE 3 – Schéma du dispositif des trous d'Young

Savoir-Faire 6

La différence de marche dans l'expérience des trous d'Young (figure 3), dans l'approximation où $D \ll a$, $D \ll x$, $D \ll y$ est

$$\delta(M) = S_2 M - S_1 M \simeq \frac{ax}{D}. \quad (66)$$

Savoir-Faire 7

Dans l'expérience des trous d'Young l'interfrange est donnée par

$$i = \frac{\lambda D}{a} \quad (67)$$

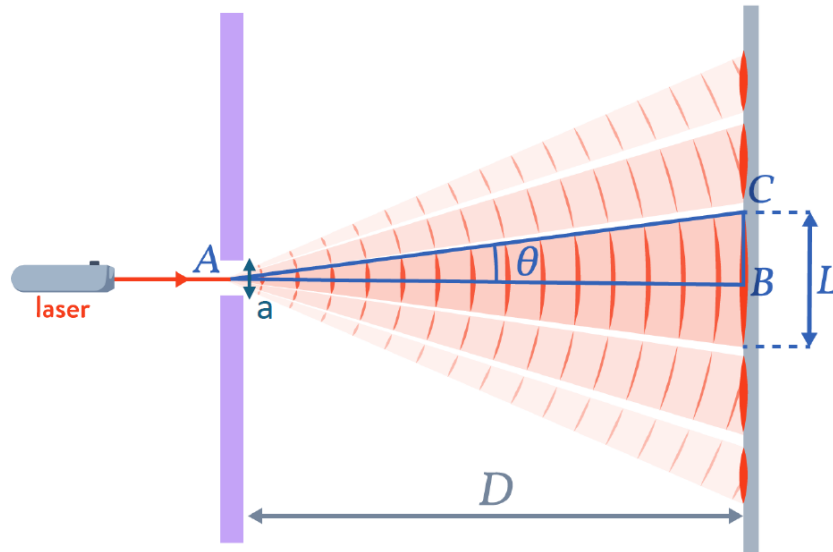


FIGURE 4 – Diffraction d'une onde lumineuse par une fente de largeur a

Partie E : Thermodynamique

Chapitre E1 : Introduction à la thermodynamique

Savoir-Faire 1

Dire si les grandeurs suivantes sont extensives ou intensives : Volume, température, quantité de matière, pression, masse volumique.

Savoir-Faire 2

La variation d'énergie interne d'un gaz parfait au cours d'une transformation ne dépend que de la variation de température :

$$\Delta U = C_V \Delta T \quad (68)$$

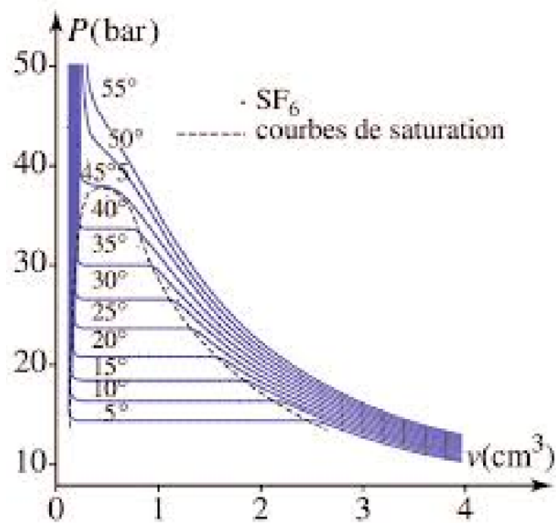


FIGURE 1 – Diagramme de Clapeyron du SF_6

Chapitre E2 : Premier principe de la thermodynamique

Savoir-Faire 1

Donner la caractéristique de chacune des transformations suivantes via une phrase et une équation : isotherme, monobare, réversible, adiabatique.

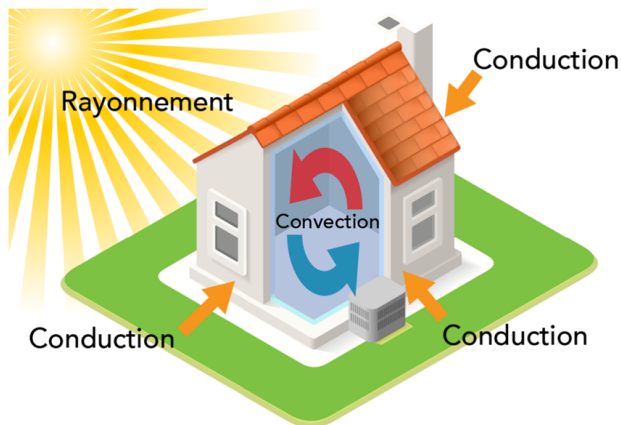


FIGURE 1 – Illustration des trois modes de transfert thermique

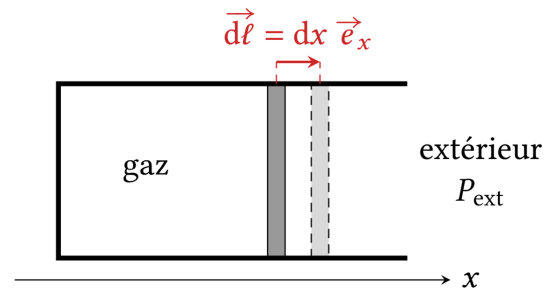


FIGURE 2 – Schéma du système étudié

Savoir-Faire 2

Pour cette transformation infinitésimale (figure 2), le travail élémentaire des forces de pression est

$$\delta W_P = -P_{\text{ext}} dV \quad (69)$$

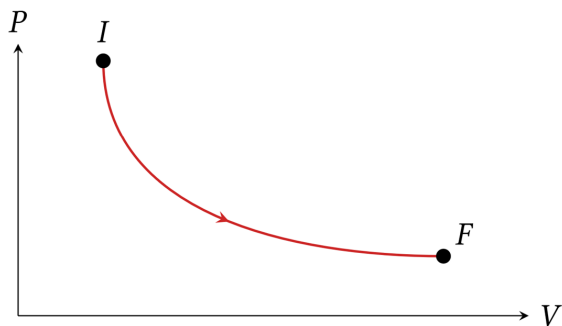


FIGURE 3 – Diagramme (P, V) appelé diagramme de Watt

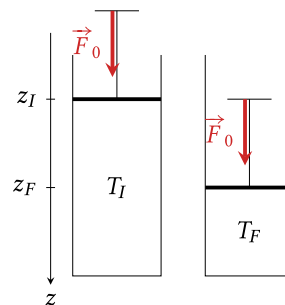


FIGURE 4 – Schéma de la situation considérée

Savoir-Faire 3

On revient sur l'exemple de [cette vidéo](#). La compression brutale du gaz permet d'élever la température suffisamment pour que le coton s'enflamme. Aucun transfert thermique n'a pourtant été apporté au gaz, il s'agit donc d'un échauffement par compression. On cherche la température finale T_f atteinte par le gaz. On considère que l'opérateur enfonce le piston sur une hauteur $h = z_F - z_I = 30 \text{ cm}$ en exerçant une force de norme $F_0 = 800 \text{ N}$ constante (figure 4). On suppose que le gaz est initialement à $T_I = 20^\circ\text{C}$, on cherche à estimer T_f la température finale du gaz.

Après avoir correctement modélisé la transformation et calculé le travail W_0 fourni par l'opérateur, on peut appliquer le premier principe de la thermodynamique au gaz considéré parfait et en déduire la température finale T_f

$$T_F = T_I + \frac{W_0}{C_V} = 500^\circ\text{C} \quad (70)$$

Savoir-Faire 4

On introduit l'enthalpie $H = U + PV$, telle que pour une transformation monobare à l'équilibre mécanique aux instants initial et final, le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\Delta H = W_{nc} + Q \quad \text{ou} \quad dH = \delta W_{nc} + \delta Q \quad (71)$$

H est une fonction d'état, qui a la dimension d'une énergie et s'exprime donc en Joules J.

Savoir-Faire 5

Au cours d'une transformation quelconque d'un gaz parfait, on a

$$\Delta H = C_P \Delta T \quad \text{ou} \quad dH = C_P dT \quad (72)$$

Savoir-Faire 6

Établir la relation de Mayer

$$C_P = C_V + nR \quad (73)$$

En déduire les expressions de C_P et C_V en fonction de γ

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \quad ; \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \quad (74)$$

Savoir-Faire 7

Pour une phase condensée incompressible et indilatable, on a

$$C_P = C_V = C \quad (75)$$

La variation d'enthalpie pour une transformation quelconque est alors

$$\Delta H = C\Delta T \quad ; \quad dH = CdT \quad (76)$$

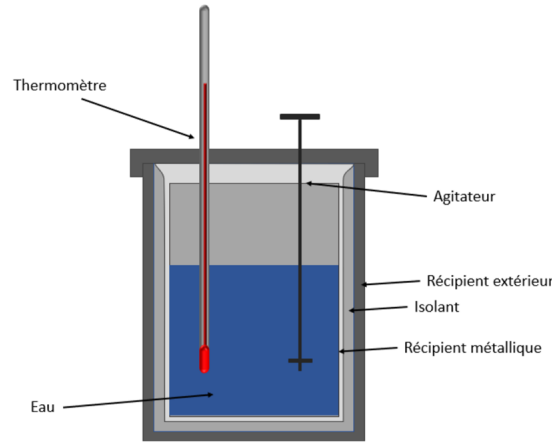


FIGURE 5 – Schéma d'un calorimètre

Savoir-Faire 8

On cherche à mesurer la capacité thermique massique du fer notée c_{fer} . Dans un calorimètre de valeur en eau $\mu = 30$ g, on place une masse $m = 400$ g d'eau et on attend l'équilibre thermique entre l'eau et le calorimètre, qui se produit à $T_{\text{eau}} = 4^\circ\text{C}$. La capacité thermique massique de l'eau est

$$c_{\text{eau}} = 4,2 \times 10^3 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1} \quad (77)$$

On ajoute alors un bloc de fer de masse $m_{\text{fer}} = 200$ g à la température $T_{\text{fer}} = 85^\circ\text{C}$. On attend à nouveau quelques minutes pour que l'équilibre thermique soit atteint, et on mesure alors $T_{\text{éq}} = 7,9^\circ\text{C}$.

On trouve

$$c_{\text{fer}} = \frac{(\mu + m)c_{\text{eau}}(T_{\text{éq}} - T_{\text{eau}})}{m_{\text{fer}}(T_{\text{fer}} - T_{\text{éq}})} = 4,6 \times 10^2 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1} \quad (78)$$