

## MP Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Convergence des intégrales de Bertrand sur  $[2, +\infty[$ .

#### Exercice 1

Soit  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}}$ .

1.  $f$  est-elle intégrale sur  $[2, +\infty[$ ? (question si  $5/2$  : sur  $]1, +\infty[$ ?)

2. Montrer que :

$$\int_2^3 f(x)dx \leq \frac{\ln(3)}{2}.$$

3. (Question indépendante!) Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Exercice 2

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ , continue, positive et décroissante. Pour tout réel  $x$  positif, on pose :

$$g(x) = f(x) \sin(x).$$

On suppose  $g$  intégrable. Montrer que  $f$  l'est également.

## MP Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ .

#### Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$  et montrer que  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de  $f$  et donner ses limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$ .
4. Montrer que  $\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$  converge. En déduire que  $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$  puis un équivalent en 0 de  $f$ .

#### Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de  $x$ , l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

est-elle définie ?

2. Étudier la monotonie de  $f$ .
3. Pour tout réel strictement positif  $x$ , calculer  $f(x) + f(x+1)$ .
4. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  ainsi qu'un équivalent.
5. Déterminer la limite de  $f$  en  $0^+$  ainsi qu'un équivalent.

## MP Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Question de cours

Existence et calcul de  $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ . avec  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 1

Étudier l'existence des intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{t \exp(-\sqrt{t})}{1+t^2} dt$ ,  
 $\int_0^{+\infty} \exp(-t \arctan(t)) dt$  et  $\int_0^{+\infty} (t+2 - \sqrt{t^2+4t+1}) dt$ .

### Exercice 2

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ , continue et positive tel que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x+1)}{f(x)} \right) = \frac{1}{2}$ .

Déterminer la nature de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ .