

MPI Sujet 1

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Expression de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.

Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln(n)}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Exercice 2

Ces deux questions son indépendantes.

1. Soit $(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^*$. Trouver les complexes z tels que :

$$z^{2n} - 2z^n \cos(na) + 1 = 0.$$

2. (a) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

(b) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ en sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

MPI Sujet 2

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.

Exercice 1

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3 \theta$ puis exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Soit f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 2$.
 - (a) Déterminer les variations de f sur $[-1, 1]$.
 - (b) Soit z un nombre complexe de module 1 et θ un de ses arguments. Établir :

$$|z^3 - z + 2|^2 = 4f(\cos(\theta))$$

3. En déduire que, pour tout complexe z de module 1, on a : $|z^3 - z + 2| \leq \sqrt{13}$.
4. Préciser les complexes z de module 1 vérifiant $|z^3 - z + 2| = \sqrt{13}$.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de réels de limite nulle. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ ont même nature et que leurs sommes sont égales en cas de convergence.

MPI Sujet 3

Corrigé dès mercredi sur:

Semaine de colle: 1 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Théorème de Cesàro, avec preuve.

Exercice 1

Banque CCINP : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = l$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication :** écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice 2

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \sin(n)$ est bornée.
2. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{\Sigma_k}{k(k+1)}$ converge absolument où on note Σ_k la somme partielle de $\sum_{n \geq 1} \sin(n)$.
3. En déduire que $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k)}{k}$ converge.