

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$

Prenons $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$.

Fixons un entier N vérifiant (1).

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \frac{1-l}{2}$.

Et donc, $\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2}$.

On pose $q = \frac{1+l}{2}$. On a donc $q \in]0, 1[$.

On a alors $\forall n \geq N, u_{n+1} \leq qu_n$.

On en déduit, par récurrence, que $\forall n \geq N, u_n \leq q^{n-N} u_N$.

Or $\sum_{n \geq N} q^{n-N} u_N = u_N q^{-N} \sum_{n \geq N} q^n$ et $\sum_{n \geq N} q^n$ converge car $q \in]0, 1[$.

Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})}$.

Or $-n \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$.

Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.

Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln n}{(\sqrt{n+3} - 1)}$.

Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .

(a) Par hypothèse, $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0 .

De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$. (1)

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}$.

C'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$. (*)

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$.

Et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N .

(b) On suppose que (v_n) est positive.

En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n \neq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \implies v_n > 0$.

De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :

$\exists N \in \mathbb{N} / N \geq N_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2}$. (*)

On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies v_n > 0$.

Donc on a aussi : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies u_n > 0$.

D'après (*), $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2}$. (**)

Premier cas : Si $\sum v_n$ converge

D'après (**), $\forall n \geq N, u_n \leq \frac{3}{2}v_n$.

Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge

D'après (**), $\forall n \geq N, \frac{1}{2}v_n \leq u_n$.

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

$$2. \text{ On pose } \forall n \geq 2, u_n = \frac{((-1)^n + i) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$

$$|u_n| = \frac{\sqrt{2} \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3} - 1)}.$$

$$\text{De plus } |u_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$$

$$\text{On a } n^{\frac{5}{4}} v_n = \frac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0. \text{ On en déduit que } \sum v_n \text{ converge.}$$

$$\text{D'après 1., } \sum_{n \geq 2} |u_n| \text{ converge.}$$

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ converge absolument.}$$

$$\text{De plus, la suite } (u_n)_{n \geq 2} \text{ est à valeurs dans } \mathbb{C}, \text{ donc } \sum_{n \geq 2} u_n \text{ converge.}$$

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées. Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.

Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leq u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \rightarrow 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

a) On a

$$\Sigma_n = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik} \right) = \operatorname{Im} \left(e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leq \left| e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$ est effectivement bornée.

b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \rightarrow 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Q1)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Q2)

On a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^4}$$

donc la série converge.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - 1 + 2 \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{\pi^2}{3} - 3$$