

Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} g(t)dt$ avec $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$. g est, par quotient, continue sur $\mathbb{R}^*$, appelons G la primitive de g sur $\mathbb{R}_*^+$ s'annulant en 1.

1. Distinguons les cas :

• **Sur $\mathbb{R}_*^+$.**

Soit x un réel strictement positif. On fixe un réel u supérieur à x , on majore $\left| \frac{e^{-t}}{t} \right|$ par $\left| \frac{e^{-t}}{x} \right|$ pour tout t de $[x, u]$ et on intègre :

$$\int_x^u \left| \frac{e^{-t}}{t} \right| dt \leq \int_x^u \left| \frac{e^{-t}}{x} \right| dt$$

ce qui donne $\int_x^u \left| \frac{e^{-t}}{t} \right| dt \leq \frac{e^{-x} - e^{-u}}{x}$. L'existence de $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - e^{-u}}{x}$ démontre (on vous laisse expliquer avec la convergence absolue...) la convergence $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$, $f(x)$ est donc bien définie.

• **En 0.**

Rappelons que $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ ne converge pas ($\lim_{u \rightarrow 0} \ln(u) = -\infty \dots$). Or $\frac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ et toutes ces fonctions sont positives sur $]0, 1]$. On peut donc affirmer que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ ne converge pas. Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ne converge pas et f n'est pas définie en 0.

• **Sur $\mathbb{R}_*^-$.**

Supposons x négatif. On vient de prouver que $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}$ ne convergeait pas, cela entraîne que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}$ ne converge pas et que f n'est pas définie en x .

Conclusion : f est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}_*^+$, on a :

$$f(x) = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) \right) - G(x).$$

G étant dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ (c'est une primitive...), f l'est par somme...

2. ... et on a $f' = -G'$ i.e. $f' : t \mapsto -\frac{e^{-t}}{t}$.

3. f' est strictement négative donc f est strictement décroissante. De plus, par somme, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \left(\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) \right) - \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) \right) = 0.$$

En 0, en majorant $G(x)$, i.e. $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$, pour x dans $]0, 1[$, par $\int_1^x \frac{dt}{et}$, i.e. $\frac{\ln(x)}{e}$, on prouve que $\lim_{x \rightarrow 0} G(x)$ vaut $-\infty$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. Signalons tout de même une subtilité dans la majoration de G : en intégrant l'inégalité $\frac{e^{-t}}{t} \geq \frac{1}{et}$, valable pour tout t de $[x, 1]$, on obtient $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_1^x \frac{dt}{et} \dots$ Pensez bien à inverser les inégalités car on intègre dans le "mauvais" sens, x étant inférieur à 1.

4. On commence par fixer un réel strictement positif x . On a :

$$\frac{xf(x)}{e^{-x}} = \int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt.$$

Montrons que cette quantité tend vers 1 quand x tend vers l'infini.

Soit u un réel supérieur à x , procédons à une intégration par parties (ce qui est possible car $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x, u]$), on obtient :

$$\int_x^u \frac{x}{t} e^{x-t} dt = \left[-\frac{x}{t} e^{x-t} \right]_x^u - \int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt = 1 - \frac{x}{u} e^{x-u} - \int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt.$$

$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{u} e^{x-u} \right)$ vaut 1, $\int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt$ converge (puisque $f(x)$ existe) donc, par différence, $\int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt$ converge et on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt = 1 - \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt. (\otimes)$$

Majorons, intégrons, on a pour tout réel u supérieur à x :

$$\int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt \leq \frac{x e^x}{x^2} \int_x^u e^{-t} dt$$

ce qui donne $\int_x^u \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt \leq \frac{1}{x} - e^{x-u} x$, puis, par passage à la limite dans les inégalités :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt \leq \frac{1}{x}.$$

Attention, c'est à x maintenant de bouger ses fesses...

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{x}{t^2} e^{x-t} dt$ existe et vaut 0.

En passant à la limite dans ($\mathbb{E}$), on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{x}{t} e^{x-t} dt = 1$... ce qui prouve que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

5. On appelle $h : t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$. Par opération, h est continue sur $\mathbb{R}^*$. De l'équivalent $e^{-t} - 1 \underset{0}{\sim} -t$, on déduit que

h est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = -1$. $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge donc.

Pour tout x de $]0, 1[$, on a :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} = \int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \ln(x).$$

Divisons, on a :

$$\frac{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)} = \frac{\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt}{\ln(x)} - 1.$$

puis passons à la limite... $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt}{\ln(x)} \right)$ existe et vaut 0 car $\ln$ tend vers l'infini en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \right)$

tend vers la quantité finie $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ puisque $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge !

Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt}{\ln(x)} \right)$ vaut -1 ce qui prouve :

$$\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x) \dots \text{i.e. } G(x) \underset{0}{\sim} \ln(x).$$

On se souvient que $f(x)$ est $\left(\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u) \right) - G(x)$, on divise :

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)}{\ln(x)} - \frac{G(x)}{\ln(x)}.$$

$G(x) \underset{0}{\sim} \ln(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{G(x)}{\ln(x)} \right)$ vaut 1. D'autre part, $\ln$ tend vers l'infini en 0 et $\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)$ est une quantité

finie donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\lim_{u \rightarrow +\infty} G(u)}{\ln(x)} \right)$ vaut 0.

Par somme, on vient donc de prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\ln(x)} \right)$ valait -1 , on a donc : $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.

b) Pour $x \leq y$, on a

$$\forall t \in]0; 1], \frac{t^{x-1}}{1+t} \geq \frac{t^{y-1}}{1+t}$$

puis en intégrant $f(x) \geq f(y)$.

La fonction f est donc décroissante.

c) On a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$$

d) Puisque f est décroissante et positive, f converge en $+\infty$. Posons ℓ sa limite.

En passant à la limite la relation obtenue ci-dessus, on obtient $2\ell = 0$ donc $\ell = 0$.

Par décroissance

$$f(x) + f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1) + f(x)$$

donc

$$\frac{1}{x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x-1}$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{1}{2x}$$

e) c) Quand $x \rightarrow 0^+$,

$$0 \leq f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1} \leq 1$$

donc

$$f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} O(1) = o(1/x)$$

et par suite

$$f(x) = 1/x - f(x+1) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} 1/x \rightarrow +\infty$$

Quand $t \rightarrow +\infty$,

$$f(t) = t + 2 - t\sqrt{1 + \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} = t + 2 - t\left(1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{2t^2} - \frac{2}{t^2} + O(1/t^3)\right) \sim \frac{3}{2t}$$

f n'est pas intégrable en $+\infty$. Puisque de plus cette fonction est positive, on peut affirmer que l'intégrale diverge.

7/2
Soit $q \in]\ell, 1[$. Il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \geq A, \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq q$$

et donc

$$\forall x \geq A, f(x+1) \leq qf(x)$$

On a alors

$$\int_A^{A+n} f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} f(t+k) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_A^{A+1} q^k f(t) dt = \int_A^{A+1} f(t) \sum_{k=0}^{n-1} q^k dt$$

et donc

$$\int_A^{A+n} f(t) \, dt \leq \frac{1}{1-q} \int_A^{A+1} f(t) \, dt = M$$

On en déduit que les intégrales sur $[A, A+n]$ de la fonction positive f sont majorées et donc f est intégrable sur $[A, A+\infty[$ puis sur $[0, +\infty[$.

L'intégrale étudiée est donc convergente.

Puisque $|g| \leq |f|$, l'intégrabilité de f entraîne celle de g .

Inversement, supposons g intégrable.

On a

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| \, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \, dt$$

avec par décroissance de f

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \, dt \leq \pi f(k\pi)$$

Parallèlement

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |f(t)| |\sin(t)| \, dt \geq f(k\pi) \int_0^\pi \sin(t) \, dt = 2f(k\pi)$$

donc

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) \, dt \leq \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(t) |\sin(t)| \, dt$$

Ainsi

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| \, dt \leq \int_0^\pi f(t) \, dt + \int_0^{(n-1)\pi} f(t) |\sin(t)| \, dt$$

et donc

$$\int_0^{n\pi} |f(t)| \, dt \leq \int_0^\pi f(t) \, dt + \int_0^{+\infty} |g(t)| \, dt$$

On peut alors affirmer que les intégrales de $|f|$ sur les segments inclus dans $[0, +\infty[$ sont majorées ce qui signifie que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3.1 [niveau]

a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur $]1, +\infty[$.
Quand $x \rightarrow 1^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc f est intégrable sur $]1, +\infty[$.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left(\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2} \right)^{1/2} \left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx \right)^{1/2}$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} [(\ln 3)^2 - (\ln 2)^2]\right)^{1/2} \leq \frac{\ln 3}{2}$$

On notera f la fonction intégrée et I l'intervalle d'étude, à chaque fois f s'avère continue par morceaux sur I .

$I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$ converge.

$I = [0, +\infty[$, $t^2 f(t) = e^{2 \ln t - t \arctan t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ donc f est intégrable et $\int_0^{+\infty} e^{-t \arctan t} dt$ converge.

a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

b) Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.

On observe

$$\sin(2(n+1)t) - \sin(2nt) = 2 \sin t \cos(2n+1)t$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} 2 \cos((2n+1)t) \cos t dt = 0$$

La suite (I_n) est constante égale à

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

c) On a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \sin(2nt) f(t) dt$$

avec

$$f(t) = \cot t - \frac{1}{t}$$

qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Ainsi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Or

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)}{t} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin u}{u} du$$

donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

d) On a

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(t) \cos(nt) dt$$

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln(t) \cos(nt) dt = \frac{\ln(\pi/2) \sin(n\pi/2)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$$

La fonction $t \mapsto \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi/2]$.

Par intégration par parties,

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) \sin(n\pi/2) - \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(nt) dt$$

La fonction $t \mapsto \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$, on a

$$\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)' \sin(nt) dt = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \sim \frac{(\ln 2) \sin(n\pi/2) - \pi}{2n}$$

Par intégration par parties

$$\int_0^x \sin(e^t) \, dt = \int_0^x e^t \sin(e^t) e^{-t} \, dt = [-\cos(e^t) e^{-t}]_0^x - \int_0^x \cos(e^t) e^{-t} \, dt$$

D'une part

$$\cos(e^x) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

et d'autre part $t \mapsto \cos(e^t) e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty]$ car

$$t^2 \cos(e^t) e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(e^t) \, dt$ converge.

a) On écrit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. En multipliant par la quantité conjuguée

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t-z} = \int_{-A}^A \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} dt$$

puis

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t-z} = \left[\frac{1}{2} \ln((t-a)^2+b^2) \right]_{-A}^A + i \left[\arctan \frac{t-a}{b} \right]_{-A}^A$$

donc

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t-z} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \begin{cases} i\pi & \text{si } \text{Im} z > 0 \\ -i\pi & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Les pôles de F sont assurément non réels.

La partie entière de F est nécessairement nulle car F est intégrable.

Dans la décomposition en éléments simples de F , les termes en $1/(X-a)^k$ avec $k \geq 2$ déterminent des expressions intégrables. Puisque F est aussi intégrable, on peut affirmer par différence que le terme

$$\sum_{a \in P} \frac{R_a}{(t-a)}$$

(avec P l'ensemble des pôles de F) est intégrable sur $\mathbb{R}$. Or

$$t \times \sum_{a \in P} \frac{R_a}{(t-a)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \sum_{a \in P} R_a$$

Il est donc nécessaire que

$$\sum_{a \in P} R_a = 0$$

c) Les termes en $1/(X - a)^k$ (avec $k \geq 2$) de la décomposition en éléments simples de F induisent des intégrales sur $\mathbb{R}$ nulles. Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{a \in P} \frac{R_a}{t - a} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \sum_{a \in P} \int_{-A}^A \frac{R_a}{t - a} dt$$

Puisque les parties polaires sont deux à deux conjuguées

$$\sum_{a \in P} \int_{-A}^A \frac{R_a}{t - a} dt = \sum_{a \in P^+} \int_{-A}^A \frac{R_a}{t - a} + \frac{\overline{R_a}}{t - \bar{a}} dt$$

puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = 2i\pi \sum_{a \in P^+} \text{Im}(R_a)$$

Mais

$$\sum_{a \in P} R_a = 0$$

donne

$$\sum_{a \in P^+} R_a + \overline{R_a} = 2 \sum_{a \in P^+} \text{Re}(R_a) = 0$$

Finalement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = 2i\pi \sum_{a \in P^+} R_a$$

d) Puisque $n \geq m + 1$, l'intégrabilité est acquise. Les pôles de la fraction

$$\frac{X^{2m}}{1 + X^{2n}}$$

sont simples et ce sont les

$$z_k = e^{\frac{i(2k+1)}{2n}\pi}$$

avec $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$.

Pour chaque $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$,

$$R_{z_k} = \left. \frac{X^{2m}}{(1 + X^{2n})'} \right|_{X=z_k} = -\frac{z_k^{2m+1}}{2n}$$

Les pôles de parties imaginaires positives sont obtenus pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ et après sommation géométrique on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right)}$$