

MP Sujet 1

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 2 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}}$.

1. f est-elle intégrale sur $[2, +\infty[$?
2. f est-elle intégrale sur $]1, +\infty[$?
3. Montrer que :

$$\int_2^3 f(x) dx \leq \frac{\ln(3)}{2}.$$

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, positive et décroissante. Pour tout réel x positif, on pose :

$$g(x) = f(x) \sin(x).$$

1. On suppose f intégrable. Montrer que g l'est également.
2. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \leq \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |g(t)| dt$$

3. On suppose g intégrable. Montrer que f l'est également.

MP Sujet 2

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 2 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et donner ses limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.
4. Montrer que $\int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ converge. En déduire que $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \underset{0}{\sim} -\ln(x)$ puis un équivalent en 0 de f .

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de x , l'intégrale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

est-elle définie ?

2. Étudier la monotonie de f .
3. Pour tout réel strictement positif x , calculer $f(x) + f(x+1)$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi qu'un équivalent.
5. Déterminer la limite de f en 0^+ ainsi qu'un équivalent.

MP Sujet 3

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 2 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 1

Étudier l'existence des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{t \exp(-\sqrt{t})}{1+t^2} dt$,
 $\int_0^{+\infty} \exp(-t \arctan(t)) dt$ et $\int_0^{+\infty} (t+2 - \sqrt{t^2+4t+1}) dt$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, continue et positive tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x+1)}{f(x)} \right) = \frac{1}{2}$.

1. Soit $R \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$. Montrer que :

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x+n) \leq R^n f(x).$$

2. En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 1

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right) \text{ et } \left(\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right)$$

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt) \cos t}{\sin t} dt$$

(on procédera par récurrence)

3. En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

4. Étudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2 \sin(t/2)) \cos(nt) dt \right)$$

Exercice 2

La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(e^t) dt$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 3

1. Soit z un nombre complexe non réel. Déterminer la limite quand $A \rightarrow +\infty$ de

$$\int_{-A}^A \frac{dt}{t - z}$$

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $F = P/Q$ soit définie et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour a pôle de F , on note R_a le coefficient de $1/(X - a)$ dans la décomposition en éléments simples de F . Calculer la somme des R_a pour a décrivant l'ensemble des pôles de F .

3. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F = 2i\pi \sum_{a \in P^+} R_a$$

où P^+ désigne l'ensemble des pôles de F de partie imaginaire strictement positive.

4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx$$