

EXERCICE 3 analyse

Énoncé exercice 3

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \frac{1}{1+x}$.

Calculer, pour tout entier naturel k , la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$.

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Corrigé exercice 3

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On prouve, par récurrence, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, h^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}.$$

2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}.$$

3. Notons (P_n) la propriété :

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n .

La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I .

Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la

fonction fg l'est aussi avec $\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I .

Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :

$$\forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on

$$\text{obtient : } \forall x \in I, (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x).$$

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

On remarque également que $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

EXERCICE 4 analyse

Énoncé exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\implies$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Corrigé exercice 4

1. Théorème des accroissements finis :
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
2. On pose $l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.
Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a, b]$.
En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f , entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.
Quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \rightarrow x_0$.
Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(c_h) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$.
On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.
3. La fonction g est clairement continue et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, |g(x)| \leq x^2$ donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} g(x) = 0 = g(0)$. Donc g est continue en 0.
 g est également dérivable en 0 car $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{1}{x} (g(x) - g(0)) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Or $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} h \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$.
Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Cependant, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
 $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (car $|2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 2|x|$), mais $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
Donc g' n'a pas de limite en 0.

EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) **Cas $\alpha \leq 0$**

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) **Cas $\alpha > 0$**

Étudier la nature de la série.

Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leq 0$

$\forall n \geq 3, \ln n \geq 1$ donc $(\ln n)^\alpha \leq 1$.

On en déduit que : $\forall n \geq 3, u_n \geq \frac{1}{n}$.

Or $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge.

Donc, par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

(b) Cas $\alpha > 0$

Soit $n \geq 3$.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc

$\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1)$

donc $\sum_{k=3}^n f(k) \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \sum_{k=3}^n f(k-1)$

C'est-à-dire, $\sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$

f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité

$\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leq \int_2^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$

de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,

autrement dit, $\sum_{n \geq 2} f(n)$ et $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

Puisque $\int_2^{+\infty} f(x) dx \stackrel{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\int_2^{+\infty} f(x) dx < \infty \iff \alpha > 1$.

On en déduit que : $\sum_{n \geq 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2, u_n = \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Au voisinage de $+\infty$,

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln(n^2 + n) = 2 \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln(n^2 + n) \underset{+\infty}{\sim} 2 \ln n$.

Et comme $e^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{8} \times \frac{1}{n (\ln n)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

a) On a

$$\Sigma_n = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik} \right) = \operatorname{Im} \left(e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leq \left| e^i \frac{1 - e^{in}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n \geq 1}$ est effectivement bornée.

b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \rightarrow 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Q 1)

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

puis après télescopage

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Q 2)

On a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} \sim \frac{1}{k^4}$$

donc la série converge.

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

donc

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k^2} - 1 + 2 \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \frac{\pi^2}{3} - 3$$