

## MPI Sujet 1

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 2 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Limite de  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec  $x \in \mathbb{R}$  puis équivalent de  $\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

#### Exercice 1

**Banque CCINP :** On considère la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$  où  $n \geq 2$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. **Cas**  $\alpha \leq 0$  En utilisant une minoration très simple de  $u_n$ , démontrer que la série diverge.
2. **Cas**  $\alpha > 0$  Étudier la nature de la série.

**Indication :** on pourra utiliser la fonction  $f$  définie par  $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$ .

#### Exercice 2

**Ces deux questions son indépendantes.**

1. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}.$$

Montrer que  $(S_n)$  converge puis montrer que :

$$S_n = C - \frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. (a) Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

(b) Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$  en sachant que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

## MPI Sujet 2

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 2 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Question de cours

Nature de la série de Bertrand

### Exercice 1

**Banque CCINP :**

1. On pose  $g(x) = e^{2x}$  et  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ .

Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , la dérivée d'ordre  $k$  des fonctions  $g$  et  $h$  sur leurs ensembles de définition respectifs.

2. On pose  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ .

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , la valeur de  $f^{(n)}(x)$ .

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

### Exercice 2

**Ces deux questions son indépendantes.**

1. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}.$$

Donner un équivalent de  $(S_n)$  puis montrer que :

$$S_n = \ln(n) + C + o_{+\infty}(1).$$

2. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Pour tout entier naturel non nul  $p$ , on appelle  $n_p$  le plus petit entier naturel  $N$  tel que  $H_N \geq p$ . Donner un équivalent de  $(n_p)$ .

## MPI Sujet 3

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 2 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Théorème de Cesàro, avec preuve.

#### Exercice 1

##### Banque CCINP :

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ .  
On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .  
Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .
3. Prouver que l'implication : ( $f$  est dérivable en  $x_0$ )  $\implies$  ( $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ ) est fausse. **Indication** : on pourra considérer la fonction  $g$  définie par :  
$$g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0.$$

#### Exercice 2

1. Montrer que  $\sum_{n \geq 1} \sin(n)$  est bornée.
2. Montrer que  $\sum_{k \geq 1} \frac{\Sigma_k}{k(k+1)}$  converge absolument où on note  $\Sigma_k$  la somme partielle de  $\sum_{n \geq 1} \sin(n)$ .
3. En déduire que  $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(k)}{k}$  converge.