

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 1

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication: Injection : définition, illustration d'une injection, d'une non injection

Démonstration: Distributivité du et sur le ou.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 2

On pose $0! = 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose : $j! = 1 \times 2 \times \cdots \times j$. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on définit le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

1. Expliciter $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.
2. Démontrer que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. En déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour tout $(k, n) \in \llbracket 0, 5 \rrbracket^2$.
4. On admet que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$ pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{Z}$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Illustrer, sans justification, les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $A \Delta B$ avec A et B deux parties non disjointes de E un ensemble non vide

Démonstration: Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Montrer que f se décompose de manière unique sous la forme de la somme d'une fonction paire et impaire.

Exercice 1

1. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x - 1 \leq \sqrt{x + 2}$.
2. Nier les propositions suivantes :
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$.
 - (b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E et les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cap A \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cup A \end{cases}.$$

1. On suppose uniquement dans cette question que $A \neq E$. Il existe donc un élément a de E tel que $a \notin A$.
 - (a) Déterminer $f(\{a\})$ et $f(\emptyset)$.
 - (b) Le sous-ensemble $\{a\}$ admet-il un antécédent par f ?
 - (c) f est-elle injective, surjective?
2. f est-elle injective, surjective?
3. g est-elle injective, surjective?

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir les relations binaires, les relations transitives et les relations antisymétriques.

Démonstration:

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 soit pair. Prouver que n est pair.
2. En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 4, u_1 = 21 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 11u_{n+1} - 30u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 5^n + 6^n$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

Exercice 2

Soit E un ensemble. Si X et Y sont deux parties de E , on note $X \Delta Y$ la partie de E définie par :

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

- 1.(a) Faire un dessin représentant X et Y et hachurer la partie $X \Delta Y$ de E .
(b) Montrer : $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et f_A l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), f_A(X) = X \Delta A.$$

- (a) Montrer : $\forall X \in \mathcal{P}(E), (X \Delta A) \Delta A = X$. Que cela signifie-t-il sur l'application $f_A \circ f_A$?
- (b) En déduire que f_A est bijective et expliciter la bijection réciproque f_A^{-1} .

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir les relations d'ordre
Démonstration: Distributivité du et sur le ou.

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

1. Donner le domaine de définition D de f
2. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est elle surjective, resp. injective ?
3. Déterminer D_0 de sorte que la restriction de f à D_0 au départ et $f(D)$ à l'arrivée soit une bijection et donner une expression de sa bijection réciproque.

Exercice 2

On pose $0! = 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose : $j! = 1 \times 2 \times \cdots \times j$. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on définit le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

1. Expliciter $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.
2. Démontrer que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. En déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour tout $(k, n) \in \llbracket 0, 5 \rrbracket^2$.
4. On admet que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$ pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{Z}$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Expliquer le raisonnement par contraposée

Démonstration: Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Montrer que f se décompose de manière unique sous la forme de la somme d'une fonction paire et impaire.

Exercice 1

1. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R} : x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.
2. Nier les propositions suivantes :
 - (a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0$.
 - (b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

Exercice 2

Soit E un ensemble non vide et A une partie de E et les applications suivantes :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cap A \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ B & \mapsto B \cup A \end{cases}.$$

1. On suppose uniquement dans cette question que $A \neq E$. Il existe donc un élément a de E tel que $a \notin A$.
 - (a) Déterminer $f(\{a\})$ et $f(\emptyset)$.
 - (b) Le sous-ensemble $\{a\}$ admet-il un antécédent par f ?
 - (c) f est-elle injective, surjective?
2. f est-elle injective, surjective?
3. g est-elle injective, surjective?

Définition et QC

Définition/ Explication: Expliquer les concepts d'images directes et réciproques
Démonstration:

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que n^2 soit pair. Prouver que n est pair.
2. En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 4, u_1 = 21 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 11u_{n+1} - 30u_n$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 \times 5^n + 6^n$.

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}.$$

Exercice 2

Soit E un ensemble. Si X et Y sont deux parties de E , on note $X \Delta Y$ la partie de E définie par :

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

- 1.(a) Faire un dessin représentant X et Y et hachurer la partie $X \Delta Y$ de E .
(b) Montrer : $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et f_A l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), f_A(X) = X \Delta A.$$

- (a) Montrer : $\forall X \in \mathcal{P}(E), (X \Delta A) \Delta A = X$. Que cela signifie-t-il sur l'application $f_A \circ f_A$?
- (b) En déduire que f_A est bijective et expliciter la bijection réciproque f_A^{-1} .