EXERCICE 5 analyse

Énoncé exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\alpha \leqslant 0$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\alpha > 0$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Corrigé exercice 5

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^{\alpha} \leqslant 1$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.

   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$
   Soit $n \geqslant 3$.
   La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc
   $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
   donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
   C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$
   f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité
   $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$
   de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,
   autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

   Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \iff \alpha > 1$.
   On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

CC BY-NC-SA 3.0 FR

Au voisinage de $+\infty$,
$\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.

Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

CC BY-NC-SA 3.0 FR

EXERCICE 6 analyse

Énoncé exercice 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}$?

Corrigé exercice 6

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}/\ \forall n\geqslant N,\ |\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\varepsilon.\quad(1)$

   Prenons $\varepsilon=\dfrac{1-l}{2}$.

   Fixons un entier N vérifiant (1).

   Alors $\forall\,n\in\mathbb{N},\ n\geqslant N\Longrightarrow|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-l|\leqslant\dfrac{1-l}{2}$.

   Et donc, $\forall n\geqslant N,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\dfrac{1+l}{2}$.

   On pose $q=\dfrac{1+l}{2}$. On a donc $q\in\,]0,1[$.

   On a alors $\forall n\geqslant N,\ u_{n+1}\leqslant qu_n$.

   On en déduit, par récurrence, que $\forall n\geqslant N,\ u_n\leqslant q^{n-N}u_N$.

   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant N}q^{n-N}u_N=u_Nq^{-N}\sum_{n\geqslant N}q^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant N}q^n$ converge car $q\in\,]0,1[$.

   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

   $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\mathrm{e}^{\,-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.

   Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\underset{+\infty}{\sim}-1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{e}^{-1}<1$.

   Donc, d'après 1., la série $\sum u_n$ converge.

CC BY-NC-SA 3.0 FR

EXERCICE 7 analyse

Énoncé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive.
   Prouver que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln n}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque 1 : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Corrigé exercice 7

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang .
   (a) Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies -\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$. (*)
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \frac{u_n}{v_n} \geqslant \frac{1}{2}$.
   Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.
   (b) On suppose que (v_n) est positive.
   En reprenant les mêmes notations que dans 1.(a) : $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n \neq 0$.
   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \implies v_n > 0$.
   De plus, on a prouvé, dans 1.(a), que :
   $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies -\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$. (*)
   On en a déduit dans 1.(a) que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \frac{u_n}{v_n} > 0$.
   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies v_n > 0$.
   Donc on a aussi : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies u_n > 0$.
   D'après (*), $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \implies \frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$. (**)
   Premier cas : Si $\sum v_n$ converge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge
   D'après (**), $\forall\, n \geqslant N$, $\frac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.

CC BY-NC-SA 3.0 FR

Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \ln n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

$|u_n| = \dfrac{\sqrt{2} \ln n \sin(\dfrac{1}{n})}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$

On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2} \ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge.

D'après 1., $\sum\limits_{n \geqslant 2} |u_n|$ converge.

Donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge absolument.

De plus, la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} u_n$ converge.

CC BY-NC-SA 3.0 FR

Posons $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si la série $\sum u_n$ converge alors puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

la série $\sum v_n$ converge car à termes positifs et aux sommes partielles majorées
Inversement, supposons la convergence de $\sum v_n$.
Puisque la suite (u_n) est de limite nulle, on peut écrire

$$0 \leqslant u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{v_k}{k} \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

et donc $(n+1)u_{n+1} \to 0$. La relation

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k + (n+1)u_{n+1} - u_{n+1}$$

donne alors la convergence de $\sum u_n$ ainsi que l'égalité des sommes des séries.

La convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ s'obtient entre autre par le critère d'Alembert puisque

$$\left|\frac{1/(k+1)!}{1/k!}\right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1$$

On peut alors majorer le reste de la série en prenant appui sur une somme géométrique

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{n!}\frac{1}{n+1}\frac{1}{1-1/n+1} = \frac{1}{n.n!}$$

Notons que raisonner par récurrence ne marche pas.

a) Puisque

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

on peut affirmer que l'ensemble

$$\left\{ p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geqslant j \right\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.
b) Par définition de Φ_j, on a

$$j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, par comparaison avec une intégrale

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} \leqslant 1 + \int_1^{\Phi_j} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln \Phi_j$$

On en déduit $\Phi_j \geqslant \mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.
c) Par définition de Φ_j, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j - 1} \frac{1}{n} \leqslant j \leqslant \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n}$$

Or, sachant que $\Phi_j \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + o(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1)$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + o(1) \leqslant j \leqslant \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + o(1)$$

donc

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + o(1)$$

puis

$$\Phi_j = \mathrm{e}^{j-\gamma+o(1)}$$

a) On a

$$\Sigma_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leqslant \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n\geqslant 1}$ est effectivement bornée.
b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \to 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leqslant k < (n+1)^2$,

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{n^2} \leqslant \frac{v_n}{n^2}$$

donc

$$0 \leqslant \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leqslant v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$

ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.
Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

a) Si $\alpha \leqslant 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \to 0$ si $a \in [0,1[$, $u_n \to 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.
Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.
b) Cas $\alpha \leqslant 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.
Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0,1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = \mathrm{e}^{2\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \ln a} \to 0$ car

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0,1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = \mathrm{e}^{(\ln n + \gamma + o(1))\ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ i.e. $a < -1/\mathrm{e}$.
Cas $\alpha > 1$: $\ell = a^{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}$,

$$v_n = \ell(\mathrm{e}^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum (-1)^n v_n$ converge.

On remarque

$$v_n \geqslant u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k$$

Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.
Aussi

$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geqslant \frac{1}{2} v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} v_k$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.