TD 3 - Cinématique du point

1 Utilisation des différentes bases - II

1. On considère un point M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, dont les coordonnées dans la base cartésienne sont
$$x(t) = a_0 t^2 + x_0 \quad ; \quad y(t) = -v_0 t \quad ; \quad z(t) = z_0 \tag{1}$$
avec $x_0 = 1\,\text{m}$, $z_0 = -1\,\text{m}$, $a_0 = 2\,\text{m/s}^2$ et $v_0 = 3\,\text{m/s}$.
   (a) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.
   (b) Calculer la norme de la vitesse du point M à $t = 2\,\text{s}$.
   (c) Calculer la norme de l'accélération de M à $t = 1\,\text{s}$.
2. On considère un point M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, dont les coordonnées dans la base cylindrique sont
$$r(t) = a_0 t^2 + r_0 \quad ; \quad \theta(t) = \omega t - \theta_0 \quad ; \quad z(t) = -v_0 t \tag{2}$$
avec $r_0 = 1\,\text{m}$, $a_0 = 1\,\text{m/s}^2$, $\omega = 3\,\text{rad/s}$, $\theta_0 = 2\,\text{rad}$ et $v_0 = 3\,\text{m/s}$.
   (a) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.
   (b) Calculer la norme de la vitesse à $t = 2\,\text{s}$.
   (c) Déterminer la norme de l'accélération initiale.

2 Équations horaires et mouvements particuliers - II

Voici différents mouvements dans le plan (Oxy) dont on donne les équations horaires, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires (cylindriques dans un plan $z = \text{cste}$. a, b, c, d et e sont des constantes. Indiquer, dans chaque cas, les caractéristiques du mouvement du point M étudié.

1. $x(t) = at^2 - bt + c$ et $y(t) = 2c$
2. En coordonnées cylindriques : $r(t) = 2c$, $\theta(t) = dt + e$ et $z(t) = 0$.
3. En coordonnées cylindriques : $r(t) = bt + c$ et $\theta(t) = 2e$ et $z(t) = 0$.

3 Dépassement - III

Une voiture A de longueur $d = 4\,\text{m}$ suit un camion de longueur $D = 10\,\text{m}$à la vitesse constante $v_0 = 72\,\text{km/h}$ sur une route droite et horizontale. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors $L = 35\,\text{m}$. À un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante $a = 3\,\text{m/s}^2$. On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

1. Établir l'équation horaire $x_{\text{av}}(t)$ du mouvement de l'avant de la voiture ainsi que celle du mouvement de l'avant du camion, $X_{\text{av}}(t)$.
2. Si on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est $20\,\text{m}$ devant l'avant du camion, calculer la durée du dépassement ainsi que la distance parcourue par le camion pendant ce temps.

4 Sortie d'autoroute - III

Bob, au volant de son automobile (qu'on assimilera à un point matériel) se déplace sur l'autoroute à la vitesse $v_0 = 130\,\mathrm{km/h}$. Il souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50\,\mathrm{m}$. Pour éviter de déraper dans la bretelle, la norme de l'accélération du véhicule ne peut excéder $10\,\mathrm{m/s^2}$.

1. En utilisant la base de Frenet, montrer que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse v_0 au risque de quitter la route.
2. Expliquer pourquoi il ne faut pas freiner dans le virage au risque, encore, de quitter la route.
3. Quelle est la vitesse maximale $v_{\max}$ à laquelle la voiture peut décrire le virage ?

5 Stabilité d'une trajectoire circulaire - IV

Une particule M est soumise à une accélération constamment dirigée vers le point O du plan (Oxy) et de norme $a = k(b/r)^n$, où k, b et n sont des constantes positives.

1. Comment faut-il choisir la vitesse initiale v_0 pour que M décrive dans le plan (Oxy) un cercle de centre O et de rayon b ?
2. Cette condition étant remplie, calculer la fréquence associée à ce mouvement.