TD 3 - Cinématique du point - Correction

1 Utilisation des différentes bases - II

1. On considère un point M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, dont les coordonnées dans la base cartésienne sont

$$x(t) = a_0 t^2 + x_0 \quad ; \quad y(t) = -v_0 t \quad ; \quad z(t) = z_0 \tag{1}$$

avec $x_0 = 1\,\text{m}$, $z_0 = -1\,\text{m}$, $a_0 = 2\,\text{m/s}^2$ et $v_0 = 3\,\text{m/s}$.

(a) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne.

Réponse

La vitesse étant la dérivée de la position, et l'accélération la dérivée de la vitesse, on a

$$\vec{v}(t) = 2a_0 t\vec{u}_x - v_0\vec{u}_y \tag{2}$$

$$\vec{a}(t) = 2a_0\vec{u}_x \tag{3}$$

(b) Calculer la norme de la vitesse du point M à $t = 2\,\text{s}$.

Réponse

$$\vec{v}(t) = 2a_0 t\vec{u}_x - v_0\vec{u}_y \implies v(t) = \sqrt{4a_0^2 t^2 + v_0^2} \tag{4}$$

En $t = 2\,\text{s}$ on trouve

$$v = 8{,}5\,\text{m/s} \tag{5}$$

(c) Calculer la norme de l'accélération de M à $t = 1\,\text{s}$.

Réponse

L'accélération est constante au cours du temps ainsi

$$a(t = 1\,\text{s}) = 2a_0 = 4\,\text{m/s}^2 \tag{6}$$

2. On considère un point M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$, dont les coordonnées dans la base cylindrique sont

$$r(t) = a_0 t^2 + r_0 \quad ; \quad \theta(t) = \omega t - \theta_0 \quad ; \quad z(t) = -v_0 t \tag{7}$$

avec $r_0 = 1\,\text{m}$, $a_0 = 1\,\text{m/s}^2$, $\omega = 3\,\text{rad/s}$, $\theta_0 = 2\,\text{rad}$ et $v_0 = 3\,\text{m/s}$.

(a) Déterminer les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base cylindrique.

Réponse

On utilise l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = 2a_0 t\vec{u}_r + (a_0 t^2 + r_0)\omega\vec{u}_\theta - v_0\vec{u}_z \tag{8}$$

De même pour l'accélération

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r}\vec{u}_r - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z = (2a_0 - (a_0 t^2 + r_0)\omega^2)\vec{u}_r + 4a_0\omega t\vec{u}_\theta \tag{9}$$

(b) Calculer la norme de la vitesse à $t = 2\,\text{s}$.

Réponse

On a ainsi

$$v = \sqrt{4a_0^2 t^2 + (a_0 t^2 + r_0)^2\omega^2 + v_0^2} \implies v(t = 1\,\text{s}) = 6{,}6\,\text{m/s} \tag{10}$$

(c) Déterminer la norme de l'accélération initiale.

Réponse

On a

$$\vec{a}(t = 0) = (2a_0 - r_0\omega^2)\vec{u}_r \tag{11}$$

$$a(t = 0) = \left|(2a_0 - r_0\omega^2)\right| = 7{,}0\,\text{m/s}^2. \tag{12}$$

2 Équations horaires et mouvements particuliers - II

Voici différents mouvements dans le plan (Oxy) dont on donne les équations horaires, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires (cylindriques dans un plan $z = \text{cste}$. a, b, c, d et e sont des constantes. Indiquer, dans chaque cas, les caractéristiques du mouvement du point M étudié.

1. $x(t) = at^2 - bt + c$ et $y(t) = 2c$

Réponse

$y(t)$ est une constante, la trajectoire appartient donc à la droite $y = 2c$, le mouvement est donc rectiligne. D'autre part l'accélération est

$$\vec{a} = 2a\vec{u}_x \tag{13}$$

et est donc constante. On a donc un **mouvement rectiligne uniformément accéléré.**

2. En coordonnées cylindriques : $r(t) = 2c$ et $\theta(t) = dt + e$ et $z(t) = 0$.

Réponse

$r(t)$ est une constante on a donc un mouvement circulaire. De plus

$$\vec{v}(t) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = 2cd\vec{u}_\theta \tag{14}$$

La norme de la vitesse est ainsi constante. On a donc un **mouvement circulaire uniforme**

.

3. En coordonnées cylindriques : $r(t) = bt + c$ et $\theta(t) = 2e$ et $z(t) = 0$.

Réponse

On a $\theta(t) = \text{cste}$ et $z = 0$ ainsi le mouvement est rectiligne, selon une droite passant par O. De plus on a

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\vec{u}_r = b\vec{u}_r \tag{15}$$

La norme de la vitesse est donc constante. On a ainsi un **mouvement rectiligne uniforme**.

3 Dépassement - III

Une voiture A de longueur $d = 4\,\text{m}$ suit un camion de longueur $D = 10\,\text{m}$ à la vitesse constante $v_0 = 72\,\text{km/h}$ sur une route droite et horizontale. La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors $L = 35\,\text{m}$. À un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante $a = 3\,\text{m/s}^2$. On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

1. Établir l'équation horaire $x_{\text{av}}(t)$ du mouvement de l'avant de la voiture ainsi que celle du mouvement de l'avant du camion, $X_{\text{av}}(t)$.

Réponse

Le mouvement de la voiture est uniformément accéléré à partir de $t = 0$. On a

$$\ddot{x}_{\text{av}} = a \implies \dot{x}_{\text{av}} = at + c_1 \implies x_{\text{av}} = a\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \tag{16}$$

Or $\dot{x}_{\text{av}}(t = 0) = v_0$ et $x_{\text{av}}(t = 0) = 0$ d'où

$$x_{\text{av}}(t) = a\frac{t^2}{2} + v_0 t. \tag{17}$$

Le camion lui suit un mouvement rectiligne uniforme

$$\dot{X}_{\text{av}} = v_0 \implies X_{\text{av}} = v_0 t + c_3 \tag{18}$$

Or $X_{\text{av}}(t = 0) = D + L$ d'où

$$X_{\text{av}} = v_0 t + D + L \tag{19}$$

2. Si on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est 20 m devant l'avant du camion, calculer la durée du dépassement ainsi que la distance parcourue par le camion pendant ce temps.

Réponse

On note $l = 20\,\text{m}$ et on cherche t_d tel que

$$x_{\text{av}}(t_d) - d = X_{\text{av}}(t_d) + l \tag{20}$$

$$a\frac{t^2}{2} + v_0 t - d = v_0 t + D + L + l \implies t = \sqrt{\frac{2(D + L + l + d)}{a}} = 4{,}8\,\text{s} \tag{21}$$

Pendant ce temps le camion a parcouru

$$D_{\text{cam}} = v_0 t = 96\,\text{m} \tag{22}$$

4 Sortie d'autoroute - III

Bob, au volant de son automobile (qu'on assimilera à un point matériel) se déplace sur l'autoroute à la vitesse $v_0 = 130\,\text{km/h}$. Il souhaite sortir de l'autoroute en utilisant une bretelle de sortie assimilée à un arc de cercle plan horizontal de rayon $R = 50\,\text{m}$. Pour éviter de déraper dans la bretelle, la norme de l'accélération du véhicule ne peut excéder $10\,\text{m/s}^2$.

1. En utilisant la base de Frenet, montrer que la voiture ne peut pas prendre la bretelle à la vitesse v_0 au risque de quitter la route.

Réponse

Les vecteurs cinématiques dans la base de Frénet sont

$$\vec{v} = v\vec{e}_t \quad ; \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n \tag{23}$$

car la norme de la vitesse est ici supposée constante. La trajectoire de la voiture est circulaire sur un cercle de rayon R qui est donc bien le rayon de courbure de la trajectoire en tout point. On peut donc calculer l'accélération de la voiture, que l'on note a_0

$$a_0 = \frac{v^2}{R} = 26\,\text{m/s}^2 > 10\,\text{m/s}^2 \tag{24}$$

la voiture déraperait alors.

2. Expliquer pourquoi il ne faut pas freiner dans le virage au risque, encore, de quitter la route.

Réponse

Si la voiture freine pendant le virage, sa vitesse est alors fonction du temps et l'accélération est

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n \tag{25}$$

À l'instant où la voiture commence à freiner, la vitesse vaut toujours v_0 donc

$$a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + a_0^2} > a_0 \tag{26}$$

La première conséquence du freinage est ainsi **d'augmenter temporairement la norme de l'accélération !**

3. Quelle est la vitesse maximale $v_{\max}$ à laquelle la voiture peut décrire le virage ?

Réponse

On cherche $v_{\max}$ tel que

$$a = \frac{v_{\max}^2}{R} = a_{\max} = 10\,\text{m/s}^2 \implies v_{\max} = \sqrt{Ra_{\max}} \tag{27}$$

L'application numérique donne

$$v_{\max} = 22\,\text{m/s} = 80\,\text{km/h} \tag{28}$$

5 Stabilité d'une trajectoire circulaire - IV

Une particule M est soumise à une accélération constamment dirigée vers le point O du plan (Oxy) et de norme $a = k(b/r)^n$, où k, b et n sont des constantes positives.

1. Comment faut-il choisir la vitesse initiale v_0 pour que M décrive dans le plan (Oxy) un cercle de centre O et de rayon b ?

Réponse

Essayons d'exploiter les données. En coordonnées cylindriques et à $z = \text{cste}$ l'accélération s'écrit

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -k(b/r)^n\vec{u}_r \tag{29}$$

Si la particule suit une trajectoire circulaire de rayon $r = b = \text{cste}$ alors $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. Ainsi on a

$$-b\dot{\theta}^2 = -k(b/b)^n = -k \quad \text{et} \quad r\ddot{\theta} = 0 \tag{30}$$

On a ainsi

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{k}{b}} \tag{31}$$

et donc, en notant v la norme de la vitesse

$$v = b\left|\dot{\theta}\right| = b\sqrt{\frac{k}{b}} = \sqrt{kb} \tag{32}$$

Il faut donc que la vitesse initiale ait pour norme $v_0 = \sqrt{kb}$. Cette condition est nécessaire **mais non suffisante !** En effet pour que le mouvement soit circulaire, la vitesse doit également être orthogonale au vecteur position initial $\vec{OM}_0$.

2. Cette condition étant remplie, calculer la fréquence associée à ce mouvement.

Réponse

On cherche la fréquence du mouvement donc le nombre de tours par secondes du point M. La vitesse angulaire est

$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{k}{b}} \tag{33}$$

Cette vitesse angulaire est également la **pulsation du mouvement**. Elle nous dit combien de fois la point M fait 2π radians en 1 s. On a ainsi

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{b}} \tag{34}$$