

MP2I **Sujet 1**

Semaine de colle: 2

Sujet disponible sur:

cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback

COLLES DE MATHÉMATIQUES

Définition et QC

Définition/ Explication: Définir les relations d'ordre

Démonstration: Composée (en cas d'existence) de deux injections, surjections, bijections...

Exercice 1

1. Nier les propositions suivantes :

(a) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n| < \varepsilon$.

(b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

2. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2x + m} \geq x + 1.$$

Exercice 2

On pose $0! = 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose : $j! = 1 \times 2 \times \cdots \times j$ Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. On définit le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

1. Expliciter $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.

2. Démontrer que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

3. En déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour tout $(k, n) \in \llbracket 0, 5 \rrbracket^2$.

4. On admet que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$ pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{Z}$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Expliquer les concepts d'images directes et réciproques

Démonstration: Si f est bijective, f^{-1} l'est et si $f \circ g$ est bijective alors $(f \circ g)^{-1}$ est

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

2.(a) Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue x réel :

i. $x - \frac{2}{x} > 0$,

ii. $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$,

iii. $\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15}} > 3$.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

(a) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(b) On appelle $h \in \mathcal{F}(I, I)$ avec $I = [-1, 1]$ la restriction de f à I . Montrer que h est bijective.

2. Soient un ensemble E et une application injective $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur E par :

$$\forall (z, z') \in E^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow f(z) \leq f(z').$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Définition et QC

Définition/ Explication: Complétez :

- Si g et f sont injectives alors ...
- Si $g \circ f$ est injective alors
- Si f et g sont bijectives alors et : $(g \circ f)^{-1} \dots$.

Démonstration: Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,]0, 1])$ définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que f est bijective puis expliciter $f([1, 2])$ et $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{R}^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

- (a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- (b) Déterminer les classes d'équivalence associées à cette relation.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
2. Prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Prouver que a^a avec $a = \sqrt{2}$ est irrationnel.
4. Trouver un irrationnel u tel que $u^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.

Définition et QC

Définition/ Explication : Citer les lois de Morgan et la distributivité du et sur le ou, du ou sur le et

Démonstration : Composée (en cas d'existence) de deux injections, surjections, bijections...

Exercice 1

1. Nier les propositions suivantes :

(a) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}, |x_n| < \varepsilon.$

(b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 (|x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$

2. Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et de paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2x + m} \geq x + 1.$$

Exercice 2

On pose $0! = 1$. Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose : $j! = 1 \times 2 \times \cdots \times j$ Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. On définit le **coefficient binomial** $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

1. Expliciter $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.
2. Démontrer que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.
3. En déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour tout $(k, n) \in \llbracket 0, 5 \rrbracket^2$.
4. On admet que $(n+1)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k$ pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Expliciter en particulier $(n+1)^4$ et $(n+1)^5$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{Z}$.

Définition et QC

Définition/ Explication : Surjection : définition, illustration d'une surjection, d'une non surjection

Démonstration : Si f est bijective, f^{-1} l'est et si $f \circ g$ est bijective alors $(f \circ g)^{-1}$ est

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

2.(a) Résoudre les équations et inéquations suivante d'inconnue x réel :

- i. $x - \frac{2}{x} > 0$,
- ii. $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15} > 0$,
- iii. $\sqrt{\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 + 2x + 15}} > 3$.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

(a) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(b) On appelle $h \in \mathcal{F}(I, I)$ avec $I = [-1, 1]$ la restriction de f à I . Montrer que h est bijective.

2. Soient un ensemble E et une application injective $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur E par :

$$\forall (z, z') \in E^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow f(z) \leq f(z').$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

Définition et QC

Définition/ Explication : Complétez :

- Si g et f sont surjectives alors ...
- Si $g \circ f$ est surjective alors
- Si f et g sont bijectives alors et : $(g \circ f)^{-1} \dots$.

Démonstration : Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+,]0, 1])$ définie par $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que f est bijective puis expliciter $f([1, 2])$ et $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]\right)$.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ binaire sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{R}^2, z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|.$$

- (a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- (b) Déterminer les classes d'équivalence associées à cette relation.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
2. Prouver que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Prouver que a^a avec $a = \sqrt{2}$ est irrationnel.
4. Trouver un irrationnel u tel que $u^{\sqrt{2}}$ soit rationnel.