

Question de cours

Expliquer la règle du $t^\alpha f(t)$...

Exercice

Déterminer la valeur de l'intégrale impropre $\int_4^{+\infty} \frac{2x+1}{(2x-1)(4-x^2)} dx$.

Exercice

On pose : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt$.

1. Montrer, par comparaison, que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt$ converge. En déduire l'existence de I . Rappeler sa valeur.
- 2.(a) Grâce à un changement de variable, calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.
(b) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 - t - 1) dt$ (*indication : effectuer la factorisation canonique de $-t^2 - t - 1$ pour se ramener à I après changement de variable*). Calculer de même $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 + 3t - 2) dt$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.
(a) Étudier $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t^{n+2} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right)$. Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ tel que :
 $\forall t \geq A : 0 \leq t^n \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leq \frac{1}{t^2}$. En déduire que l'intégrale I_n existe.
(b) Donner la valeur de I_0 puis calculer I_1 .
(c) Démontrer que : $I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis calculer I_n en fonction de n .

Question de cours

Parler des intégrales de référence

Exercice

On considère l'intégrale $I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2 - x - 2} dx$.

1. Quelle est la nature de l'intégrale I ?
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in]2, +\infty[$, $\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 2}$.
3. En déduire la valeur de I .

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + 1)(\sqrt{x} + 1)}$. On note F la primitive de f s'annulant en 1.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.
2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, calculer explicitement $F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement positif.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Question de cours

Citer le théorème de comparaison

Exercice

On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})} dx$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.
2. Donner une primitive de : $f : x \mapsto \frac{1}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})}$.
3. Montrer que l'intégrale I est convergente, puis calculer sa valeur.

Exercice

1. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente puis, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est convergente.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx$.
 - (a) Montrer I_n est bien définie.
 - (b) Montrer que $f : \begin{cases} \left[0; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
 - (c) On pose $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx$. Calculer J_n .
 - (d) Exprimer I_n à l'aide de J_n et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.