

a) On a

$$P_0 \left| \begin{array}{c} 1 - y_0 \\ y_0 \end{array} \right. \text{ et } Q_0 \left| \begin{array}{c} 1 + y_0(x_1 - 1) \\ y_0 y_1 \end{array} \right.$$

(en considérant que les cas singuliers sont les prolongements du cas général)
On en déduit

$$\begin{cases} x_2 = x_0 + y_0 x_1 \\ y_2 = y_0 y_1 \end{cases}$$

b) Avec des notations immédiates

$$(M_0 \star M_1) \star M_2 \left| \begin{array}{c} (x_0 + y_0 x_1) + (y_0 y_1) x_2 \\ (y_0 y_1) y_2 \end{array} \right. \text{ et } M_0 \star (M_1 \star M_2) \left| \begin{array}{c} x_0 + y_0(x_1 + y_1 x_2) \\ y_0(y_1 y_2) \end{array} \right.$$

et on vérifie bien l'associativité de la loi $\star$.

On remarque que

$$B \star M = M \star B = M$$

donc B est élément neutre de la loi $\star$.

Enfin si $y_0 \neq 0$ alors pour

$$x_1 = -x_0/y_0$$

$$y_1 = 1/y_0$$

on observe

$$M_0 \star M_1 = M_1 \star M_0 = B$$

et donc on peut affirmer que M_0 est inversible d'inverse M_1 .

c) On a

$$y_n = y_{n-1}y_{n-2}$$

et on peut donc affirmer qu'il est possible d'écrire y_n sous la forme

$$y_n = y_0^{a_n} y_1^{b_n}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_0 = 0, b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont récurrente linéaires d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 = r + 1$ de racines

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

On obtient après calculs

$$a_n = \frac{r_2}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{r_1}{r_1 - r_2} r_2^n \text{ et } b_n = \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}$$

a) L'application considérée est au départ d'un ensemble infini et à valeurs dans un ensemble fini, elle ne peut donc être injective et il existe $k < \ell \in \mathbb{N}$, $M^k = M^\ell$ ce qui fournit $M^p = I_n$ avec $p = \ell - k$ car M est inversible. On en déduit que $I_n \in H$ et que $M^{-1} = M^{p-1} \in H$. Cela suffit pour conclure que H est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

b) Si $M \in H$ alors $N \mapsto MN$ et $N \mapsto NM$ sont des permutations de H . On en déduit que $MP = PM = P$ car pour chaque terme les sommes portent sur les mêmes éléments.

$$P^2 = \frac{1}{q} \sum_{M \in H} MP = \frac{1}{q} \sum_{M \in H} P = P$$

c) Puisque $P^2 = P$, $\text{Im} P = \ker(P - I_n)$ et $\ker P$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si $X \in \ker P$ alors $PX = 0$ et pour tout $M \in H$, $PMX = PX = 0$ donc $MX \in \ker P$. Ainsi $\ker P$ est stable par H .

Si $X \in \bigcap_{M \in H} \ker(M - I_n)$ alors pour tout $M \in H$, $MX = X$ donc $PX = X$ puis $X \in \ker(P - I_n)$.

Inversement, si $X \in \ker(P - I_n)$ alors $PX = X$ et pour tout $M \in H$, $X = PX = MPX = MX$ et donc $X \in \bigcap_{M \in H} \ker(M - I_n)$. Ainsi

$$\bigcap_{M \in H} \ker(M - I_n) = \ker(P - I_n)$$

et $\ker P$ est solution du problème posé.

d) P est une projection donc $\text{tr} P = \text{rg} P \in \mathbb{N}$ et donc $\sum_{M \in H} \text{tr} M = q \text{tr} P \in q\mathbb{N}$.

Si $\sum_{M \in H} \text{tr} M = 0$ alors $P = 0$. Par suite $\bigcap_{M \in H} \ker(M - I_n) = \{0\}$ et il n'y a donc pas de vecteur non nul invariant pour tous les éléments de H et inversement.

Les inversibles sont obtenus à partir des nombres premiers avec 20

$$G = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$$

3 est un élément d'ordre 4 dans $(G, \times)$ avec

$$\langle 3 \rangle = \{1, 3, 9, 7\}$$

et 11 est un élément d'ordre 2 n'appartenant pas à $\langle 3 \rangle$.

Le morphisme $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow G$ donné par

$$\varphi(k, \ell) = 11^k \times 3^\ell$$

est bien défini et injectif par les arguments qui précèdent.
Par cardinalité, c'est un isomorphisme.

a) Posons $N = -A^{-1}BA$. On a

$$N^p = (-1)^p A^{-1} B^p A = O_n$$

donc

$$I_n = I_n - N^p = (I - N)(I + N + N^2 + \dots + N^{p-1})$$

On en déduit que $I - N = I_n + A^{-1}BA$ est inversible et

$$(I_n + A^{-1}BA)^{-1} = I + N + N^2 + \dots + N^{p-1}$$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) = 0$. On a

$$P(X) = aX + bX^2 + \dots$$

Donc

$$P(B) = aB + bB^2 + \dots$$

puis

$$P(B)^p = a^p B^p + b^p B^{p+1} + \dots = O_n$$

On peut alors reprendre le raisonnement de la question précédente et affirmer que la matrice $I_n + P(B)$ est inversible et que son inverse est de la forme

$$I_n - P(B) + P(B)^2 - \dots + (-1)^p P(B)^p$$

On en déduit que H est inclus dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ et que l'inverse d'un élément de H est encore dans H .

Il est immédiat de vérifier que H est non vide et stable par produit. On en déduit que H est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$. Enfin, on vérifie que H est commutatif car les polynômes en une matrice commutent entre eux.