

TD 4 - Dynamique du point - Correction

1 Applications de cours - II

1. À partir du principe fondamental de la dynamique appliqué à un système isolé, redémontrer la première loi de Newton (ou principe d'inertie).

Réponse

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On étudie un système isolé, ainsi la résultante des forces appliquées à ce système est nulle. Le principe fondamental de la dynamique est alors

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{0} \implies \vec{a} = \vec{0} \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \quad (1)$$

Le vecteur vitesse du système isolé est donc constant, ce dernier est donc en **translation rectiligne uniforme**.

2. Soient deux corps A et B de masses m_A et m_B , distants de R . La loi de gravitation universelle nous dit que la force appliquée par A sur B et celle appliquée par B sur A sont

$$\vec{F}_{B/A} = G \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB} \quad ; \quad \vec{F}_{A/B} = -G \frac{m_A m_B}{AB^2} \vec{u}_{AB} = -\vec{F}_{B/A} \quad (2)$$

où $G = 6,67 \times 10^{-11}$ SI est la constante de gravitation universelle.

- (a) Déterminer l'unité de G .

Réponse

On a

$$N = [G] \frac{\text{kg}^2}{\text{m}^2} \implies [G] = N \text{ m}^2 \text{ kg}^{-2} \quad (3)$$

Ainsi

$$[G] = \text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1} \quad (4)$$

On note $M_T = 6,0 \times 10^{24}$ kg la masse de la Terre et $R = 6300$ km le rayon terrestre. On considère la situation où vous effectuez un saut au dessus du sol. On négligera toute autre force que la force de gravitation et on ne considère que vous et la Terre.

- (b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique afin de déterminer votre accélération, puis celle de la Terre. Conclure.

Réponse

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Dans un premier temps on étudie nous même, pendant un saut, qu'on considère comme un point matériel de masse m . La seule force s'appliquant sur le système est alors l'attraction gravitationnelle de la Terre. Le PFD appliqué à nous même donne

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = -G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u}_z = -mg\vec{u}_z \quad (5)$$

où $\vec{u}_z$ est la verticale ascendante et $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ l'accélération de la pesanteur. L'accélération que l'on subit lorsque l'on saute est alors

$$\vec{a} = -g\vec{u}_z \quad (6)$$

de norme $a = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Étudions maintenant la Terre, que l'on assimile alors à un point matériel de masse M_T , pendant notre saut. On suppose que la seule force appliquée à la Terre est l'attraction gravitationnelle de nous pendant notre saut. On note $\vec{a}_T$ l'accélération de la Terre. La seconde loi de Newton nous donne alors

$$M_T\vec{a}_T = \sum \vec{F} = G \frac{mM_T}{R_T^2} \vec{u}_z \quad (7)$$

et ainsi

$$\vec{a}_T = G \frac{m}{R_T^2} \vec{u}_z \quad (8)$$

Si on prend $m = 70 \text{ kg}$ on trouve

$$a_T = 1,2 \times 10^{-22} \text{ m/s}^2 \quad (9)$$

L'accélération de la Terre est ridiculement faible par rapport à la notre, c'est bien nous qui retombons sur la Terre et non l'inverse (ouf)! La différence entre nous et la Terre est notre **inertie** : il faut appliquer une force bien plus grande à la Terre qu'à nous pour la faire accélérer. En effet dans le cas qu'on vient d'étudier, le rapport de nos accélérations est

$$\frac{a}{a_T} = \frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2}{Gm} = \frac{M_T}{m} \gg 1 \quad (10)$$

3. Projeter chacune des trois forces de la figure 1 dans la base cartésiennes, c'est à dire donner ses composantes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en fonction de la norme de la force (F_1, F_2 ou F_3) et de l'angle α, β ou γ .

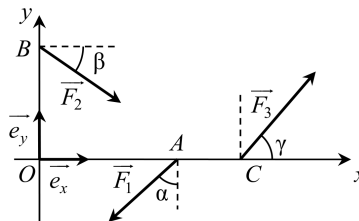


FIGURE 1 – Exemples de forces

Réponse

On a

$$\vec{F}_1 = -\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y \quad (11)$$

$$\vec{F}_2 = \cos \beta \vec{e}_x - \sin \beta \vec{e}_y \quad (12)$$

$$\vec{F}_3 = \cos \gamma \vec{e}_x + \sin \gamma \vec{e}_y \quad (13)$$

4. Une première étude d'un atome d'hydrogène consiste à envisager un électron en mouvement autour d'un proton fixe, les deux étant assimilés à des points matériels et placés sur Terre.

Données : charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, le proton est chargé e et l'électron $-e$; distance moyenne proton-électron $d = 53$ pm; masse de l'électron $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg; masse du proton $m_p = 1,7 \times 10^{-27}$ kg; $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m.

- (a) Faire le bilan des forces s'appliquant sur l'électron dans ce modèle.

Réponse

L'électron subit la force de Coulomb appliquée par le proton

$$\vec{F}_C = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \vec{u}_r \quad (14)$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur radial des coordonnées sphériques. L'électron subit aussi son propre poids

$$\vec{P} = m_e \vec{g}. \quad (15)$$

Finalement il subit également l'attraction gravitationnelle du proton

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_e m_p}{d^2} \vec{u}_r \quad (16)$$

- (b) Donner un ordre de grandeur de ces forces, commenter le résultat.

Réponse

Les applications numériques donnent

$$F_C = 8,2 \times 10^{-8} \text{ N} \quad ; \quad P = 8,9 \times 10^{-30} \text{ N} \quad ; \quad F_G = 3,7 \times 10^{-47} \text{ N} \quad (17)$$

On a donc

$$F_C \gg P \gg F_G \quad (18)$$

La force de Coulomb domine très largement les deux autres forces que l'on peut donc négliger pour une première étude de l'atome d'hydrogène.

2 Coup franc - III

On étudie, dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe $(Oxyz)$, un coup franc de football tiré à 20 m du but de hauteur 1,90 m, face au but dans son plan médian vertical (Oxy) . L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante (figure 2).

Le ballon, de masse $m = 430$ g, est assimilé à un point matériel M posé sur le sol initialement en O . Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ de norme 20 m s^{-1} et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. L'origine des dates correspond au départ du ballon.

1. Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

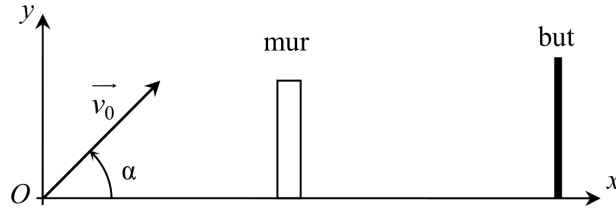


FIGURE 2 – Schéma de la situation étudiée

- (a) Établir les lois horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

Réponse

On étudie le ballon de masse m , dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. On se place dans le repère cartésien. Les frottements de l'air étant négligés, la seule force s'appliquant au ballon est son poids

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_y \quad (19)$$

On applique le principe fondamental de la dynamique au ballon

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_y \quad (20)$$

On projette ces équations sur les trois axes cartésien

$$m\ddot{x} = 0 \quad ; \quad m\ddot{y} = -mg \quad ; \quad m\ddot{z} = 0 \quad (21)$$

et on intègre par rapport au temps

$$\dot{x} = c_1 \quad ; \quad \dot{y} = -gt + c_2 \quad ; \quad \dot{z} = c_3 \quad (22)$$

La condition initiale est

$$\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \implies \dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha \quad ; \quad \dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha \quad ; \quad \dot{z}(t=0) = 0 \quad (23)$$

Ainsi

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \quad ; \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \quad ; \quad \dot{z} = 0 \quad (24)$$

On intègre une dernière fois par rapport au temps

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t + c_4 \quad ; \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + c_5 \quad ; \quad z(t) = c_6 \quad (25)$$

Le ballon étant à l'origine à $t = 0$ on a $c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Finalement les équations horaires sont

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad ; \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \quad ; \quad z(t) = 0 \quad (26)$$

- (b) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

Réponse

On note $d = 9,15$ m la distance entre le point de départ et le mur et $h = 1,90$ m la hauteur du mur. Le ballon passe au dessus du mur si $y(x = d) \geq h$. Déterminons donc $y(x)$, et pour cela exprimons t en fonction de x

$$x = v_0 \cos \alpha t \implies t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad (27)$$

Ainsi

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \frac{v_0 x \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} \implies y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + x \tan \alpha \quad (28)$$

Calculons maintenant $y(d)$

$$y(d) = 2,17 \text{ m} \geq 1,9 \text{ m} \quad (29)$$

Le ballon passe donc au dessus du mur !

(c) Le tir est-il cadré ?

Réponse

On note $D = 20$ m la distance entre le point de départ et le but. Pour que le tir soit cadré, il faut que $0 \text{ m} \leq y(D) \leq 1,9 \text{ m}$. On calcule donc $y(D)$

$$y(D) = 1,7 \text{ m} \quad (30)$$

le tir est donc cadré !

2. En réalité, des frottements existent, qu'on modélise par une force $\vec{F} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive de valeur $5,0 \times 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$ et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M à chaque instant.

(a) Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{h}$.

Réponse

Par rapport à l'étude précédente, on rajoute maintenant la force de frottement $\vec{F} = -h\vec{v}$. On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique au ballon, dans le référentiel terrestre galiléen

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_y - h\vec{v} \quad (31)$$

Comme précédemment, le mouvement est contenu dans le plan (x, y) , on projette donc ces équations sur ces axes

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} \quad ; \quad m\ddot{y} = -mg - h\dot{y} \quad (32)$$

On met ces deux équations différentielles sous forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} + \frac{h}{m}\dot{y} = -g \implies \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} = -g \quad (33)$$

où on a introduit $\tau = m/h$. L'équation différentielle sur $\dot{x}$ n'a pas de second membre, la solution générale est donc celle de l'équation homogène

$$\dot{x}(t) = A \exp(-t/\tau) \quad (34)$$

L'équation différentielle sur $\dot{y}$ a un second membre, on donne d'abord la solution de l'équation homogène

$$\dot{y}_H(t) = B \exp(-t/\tau) \quad (35)$$

une solution particulière est $\dot{y}_p = -g\tau$. La solution générale est donc

$$\dot{y}(t) = B \exp(-t/\tau) - g\tau \quad (36)$$

Pour déterminer les constantes A et B on utilise la condition initiale

$$\dot{x}(t=0) = v_0 \cos \alpha \quad ; \quad \dot{y}(t=0) = v_0 \sin \alpha \quad (37)$$

D'où

$$A = v_0 \cos \alpha \quad ; \quad B - g\tau = v_0 \sin \alpha \implies B = v_0 \sin \alpha + g\tau \quad (38)$$

Finalement

$$v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha \exp(-t/\tau) \quad ; \quad v_y = \dot{y} = (v_0 \sin \alpha + g\tau) \exp(-t/\tau) - g\tau \quad (39)$$

On intègre finalement ces deux expressions en tenant compte des conditions initiales $x(t=0) = y(t=0) = 0$

$$x(t) = v_0 \tau \cos \alpha (1 - \exp(-t/\tau)) \quad ; \quad y(t) = (v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2)(1 - \exp(-t/\tau)) - g\tau t \quad (40)$$

(b) Donner l'équation de la trajectoire.

Réponse

On utilise la première équation pour exprimer t en fonction de x

$$\exp(-t/\tau) = 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \implies t = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \quad (41)$$

Et on reporte cette expression dans la deuxième

$$y(x) = (v_0 \tau \sin \alpha + g \tau^2) \left(1 - 1 + \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) + g \tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \quad (42)$$

et ainsi

$$y(x) = \left(\tan \alpha + \frac{g \tau}{v_0 \cos \alpha} \right) x + g \tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \quad (43)$$

(c) Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

Réponse

On calcule $y(d)$

$$y(d) = 2,16 \text{ m} \geq h \quad (44)$$

le ballon passe au dessus du mur !

(d) Le tir est-il cadré ?

Réponse

On calcule $y(D)$, on trouve

$$y(D) = 1,7 \text{ m} \quad (45)$$

le tir est donc cadré. On constate que les frottements ont peu d'influence sur le mouvement, car la vitesse du ballon reste relativement faible (tout ça pour ça !)