

MP Sujet 1

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 4 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Convergence simple et uniforme de (f_n) avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto n^\alpha x e^{-nx} \end{cases}.$$

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n(0) = 0$ et pour tout x de $]0, 1]$:

$$u_n(x) = x^n \ln(x).$$

A-ton CVU sur $[0, 1]$?

Exercice 2

Banque CCINP :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

MP Sujet 2

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 4 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées de A dans $\mathbb{K}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .
2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.
 - (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .
 - (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
 - (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
 - (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ pour } x \text{ réel et } n \text{ entier naturel non nul.}$$

MP Sujet 3

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 4 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Étude de la convergence : simple, normale et uniforme avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^n}{x+n} \end{cases}.$$

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f .

On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions (f_n)

ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

- (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum f_n$ avec :

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \text{ pour } x \text{ réel positif et } n \text{ entier naturel.}$$