

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner les propriétés classiques de $\ln$

Démonstration: Formule du pion et du triangle de Pascal.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $I_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ et en déduire S_n .
2. On pose maintenant $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter S_n .

Exercice 2

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f : x \mapsto \begin{cases} (x+1) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1.(a) Calculer la dérivée de f sur $]0, +\infty[$.
(b) Déterminer la limite de $u \mapsto (1+u)e^{-u}$ en $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0.
(c) Étudier le sens de variations de f .
(d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi : u \mapsto 1 - (1+u)e^{-u}$.
(a) Calculer la dérivée de φ .
(b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi'(u) \leq u$.
(c) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi(u) \leq \frac{u^2}{2}$.
- 3.(a) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$.
(b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote Δ en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .

Définition et QC

Définition/ Explication: Définition et tracé de arccos et arcsin

Démonstration: Dérivée d'un produit.

Exercice 1

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Expliciter $\sin(\arccos(x))$ (démonstration attendue!).
2. Prouver de deux façons différentes que : $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur à 2.

1. On pose $C_n = \sum_{k=1}^n k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^n k^2$. On n'utilisera pas l'explicitation de B_n qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.
 - (a) Exprimer D_n en fonction de C_n .
 - (b) Trouver une relation entre D_n , C_n et B_n basée sur le développement de $(k+1)^3$ et en déduire B_n .
- 2.(a) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
 - (b) Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, relier $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-2}{k-2}$.
 - (c) En déduire $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Définition et QC

Définition/ Explication: Tracer les fonctions puissances et rappeler la définition de a^b avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Démonstration: Expliciter $\cos(\arcsin(x))$ puis en déduire la dérivée de $\arcsin$.

Exercice 1

1. Soit θ un réel. Exprimer, sous réserve d'existence, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. On démontrera ces formules.
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[: \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur à 2, on pose :

$$S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n).$$

1. Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right)$ avec $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

2. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

3. Démontrer autrement ce dernier résultat.

Définition et QC

Donner les formules des sommes géométriques et de $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$. Formule du pion et du triangle de Pascal.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $I_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ et en déduire S_n .
2. On pose maintenant $S_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter S_n .

Exercice 2

Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f : x \mapsto \begin{cases} (x+1) \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1.(a) Calculer la dérivée de f sur $]0, +\infty[$.
(b) Déterminer la limite de $u \mapsto (1+u)e^{-u}$ en $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0.
(c) Étudier le sens de variations de f .
(d) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\varphi : u \mapsto 1 - (1+u)e^{-u}$.
(a) Calculer la dérivée de φ .
(b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi'(u) \leq u$.
(c) En déduire que pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \varphi(u) \leq \frac{u^2}{2}$.
- 3.(a) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x - f(x) \leq \frac{1}{2x}$.
(b) En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet une droite asymptote Δ en $+\infty$. Préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ .

Définition et QC

Tracer les fonctions puissances et rappeler ce qu'on peut faire et ce qu'on ne peut pas faire avec les puissances Dérivée d'un produit.

Exercice 1

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Expliciter $\sin(\arccos(x))$ (démonstration attendue!).
2. Prouver de deux façons différentes que : $\forall x \in [-1, 1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 2

Soit n un entier supérieur à 2.

1. On pose $C_n = \sum_{k=1}^n k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^n k^2$. On n'utilisera pas l'explicitation de B_n qui se trouve dans votre cours, le but de cette question est de la retrouver.
 - (a) Exprimer D_n en fonction de C_n .
 - (b) Trouver une relation entre D_n , C_n et B_n basée sur le développement de $(k+1)^3$ et en déduire B_n .
- 2.(a) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.
 - (b) Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, relier $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-2}{k-2}$.
 - (c) En déduire $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Définition et QC

Expliquer les échanges de sommes Expliciter $\cos(\arcsin(x))$ puis en déduire la dérivée de $\arcsin$.

Exercice 1

1. Soit θ un réel. Exprimer, sous réserve d'existence, $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. On démontrera ces formules.
2. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $t \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[: \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)} = \frac{1}{2}$.
3. En déduire la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier n supérieur à 2, on pose :

$$S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \cdots + 2 \times n) + \cdots + ((n-1) \times n).$$

1. Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right)$ avec $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

2. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

3. Démontrer autrement ce dernier résultat.