

## MPI Sujet 1

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 5 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

### Question de cours

Convergence uniforme de  $(f_n)$  avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^n(1-x) \end{cases}.$$

### Exercice 1

**Banque CCINP :** On pose  $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$ .

1. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$ .

### Exercice 2

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $u_n(0) = 0$  et pour tout  $x$  de  $]0, 1]$  :

$$u_n(x) = x^n \ln(x).$$

A-ton CVU sur  $[0, 1]$  ?

## MPI Sujet 2

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 5 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Non convergence uniforme de  $(f_n)$  avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \arctan(nx) \end{cases}.$$

#### Exercice 1

##### Banque CCINP :

1. Soit  $X$  un ensemble,  $(g_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{C}$  et  $g$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{C}$ .  
Donner la définition de la convergence uniforme sur  $X$  de la suite de fonctions  $(g_n)$  vers la fonction  $g$ .
2. On pose  $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$ .
  - (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(f_n)$ .
  - (b) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, +\infty[$  ?
  - (c) Soit  $a > 0$ . La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$  ?
  - (d) La suite de fonctions  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément sur  $]0, +\infty[$  ?

#### Exercice 2

##### Banque CCINP :

1. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ , et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $x_0$ , avec  $x_0 \in [a, b]$ . Démontrer que  $f$  est continue en  $x_0$ .
2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], g_n(x) = x^n$ .  
La suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; 1]$  ?

## MPI Sujet 3

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 5 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

### COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

#### Question de cours

Preuve de convergence uniforme et intégration.

#### Exercice 1

##### Banque CCINP :

1. Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction  $f$ .  
On suppose qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  ne tende pas vers 0. Démontrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $X$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$ .
  - (a) Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .
  - (b) Étudier la convergence uniforme de la suite  $(f_n)$  sur  $[a, +\infty[$  (avec  $a > 0$ ), puis sur  $]0, +\infty[$ .

#### Exercice 2

Étudier la convergence uniforme de de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x}{n(1 + x^n)} \end{cases} .$$