

Question de cours

Énoncer la formule du binôme de Newton.

Exercice

1. Calculer $\sum_{k=8}^{20} k$ et $\sum_{k=5}^{10} \frac{1}{2^k}$. On donnera les résultats sous forme d'une fraction irréductible.

2. On pose $S = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$.

(a) Montrer que : $S = \sum_{k=1}^n (\ln(k) - 2 \ln(k+1) + \ln(k+2))$.

(b) En déduire l'expression de S en fonction de n .

Exercice

Questions indépendantes.

1. Expliciter $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n x^{2k}$ et $\sum_{k=0}^n 2^{3k} x^{-k}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^n k k!$.

Question de cours

Énoncer la formule du triangle de Pascal.

Exercice

Soit n un entier supérieur à 2.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2(k-1)}$.
2. En déduire l'expression de $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k^2 - 1)} \right)$ en fonction de n .

Exercice

Questions indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, évaluer $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k k$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En reconnaissant une somme télescopique, calculer $\sum_{k=1}^n k k!$.

Question de cours

Expliciter $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n q^k$ avec $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice

Soit n un entier supérieur à 2. On admet que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Calculer $\sum_{k=4}^{2n} (k^2 - (2k-1)^2)$.

Exercice

1. Démontrer que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $p \leq n$, on a : $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}.$$