

TD 5 - Correction

1 Viscosimètre à bille - III

Une méthode très simple à mettre en œuvre pour mesurer la viscosité η d'un fluide relativement visqueux consiste à lâcher une bille dans une éprouvette contenant le fluide et à mesurer sa vitesse limite de chute. On s'intéresse dans cet exercice à une bille en acier de rayon $R = 1 \text{ mm}$ qui tombe dans une huile siliconée (figure 1). L'huile exerce sur la bille une force de frottement fluide donnée par la loi de Stokes,

$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v} \quad (1)$$

La masse volumique de l'acier est $\rho_a = 7,83 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ et celle de l'huile est $\rho_h = 970 \text{ kg/m}^3$.

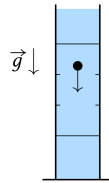


FIGURE 1 – Viscosimètre à bille

1. Déterminer l'unité de η .

Réponse

On utilise la formule donnée de la force de frottements fluides et ainsi

$$N = [\eta] \times \text{m m s}^{-1} \Rightarrow [\eta] = \frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{m}^2 \text{ s}^{-1}} \Rightarrow [\eta] = \text{kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \quad (2)$$

2. Donner l'expression du poids $\vec{P}$ de la bille.

Réponse

On a

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mh\vec{u}_z \quad (3)$$

où on a placé un axe z vertical vers le haut. On exprime la masse m de la bille en fonction de R et ρ_a

$$\vec{P} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g \vec{u}_z \quad (4)$$

3. La bille subit également la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$, dont la norme est égale *au poids du fluide déplacé* et qui est orientée vers le haut. Donner l'expression de $\vec{\Pi}$.

Réponse

Le poids du fluide déplacé correspond au poids de la masse d'huile qui occuperait le volume de la bille, ainsi

$$\vec{\Pi} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h g \vec{u}_z \quad (5)$$

4. Montrer qu'en présence de la poussée d'Archimède, tout se passe comme si la bille avait une masse volumique apparente $\rho_a - \rho_h$.

Réponse

On a

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = -\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_h) g \vec{u}_z \quad (6)$$

ce qui est l'expression du poids qu'aurait une bille de rayon R et de masse volumique $\rho_a - \rho_h$.

5. Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme de la vitesse de la bille. La résoudre, et faire apparaître la vitesse limite atteinte par la bille et la durée caractéristique τ nécessaire pour atteindre cette vitesse limite.

Réponse

On étudie la bille, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On se place dans un repère cartésien, l'origine O étant prise au point de départ de la bille, et l'axe z étant orienté vers le haut. La bille subit le poids $\vec{P}$, la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottements fluides $\vec{f}$. On applique le principe fondamental de la dynamique à la bille

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \quad (7)$$

le mouvement est à une dimension selon z ainsi

$$\vec{a} = a\vec{u}_z = \frac{dv}{dt}\vec{u}_z \quad (8)$$

On projette le PFD sur l'axe $\vec{u}_z$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \frac{dv}{dt} = -\frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_h)g - 6\pi\eta Rv \quad (9)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants portant sur la vitesse v , on la met sous sa forme canonique

$$\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2R^2\rho_a}v = -\frac{(\rho_a - \rho_h)g}{\rho_a} \quad (10)$$

On pose

$$\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta} \quad (11)$$

et ainsi

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = -\frac{(\rho_a - \rho_h)g}{\rho_a} \quad (12)$$

La solution homogène est

$$v_H(t) = A \exp(-t/\tau) \quad (13)$$

et la solution particulière est constante comme le second membre

$$v_p = \frac{2R^2(\rho_a - \rho_h)g}{9\eta} = v_{\text{lim}} \quad (14)$$

Ainsi la solution générale est

$$v(t) = A \exp(-t/\tau) + v_{\text{lim}} \quad (15)$$

Pour déterminer A on utilise les conditions initiales, on suppose $v(t=0) = 0$ ainsi

$$A + v_{\text{lim}} = 0 \implies A = -v_{\text{lim}} \quad (16)$$

Et finalement

$$v(t) = v_{\text{lim}}(1 - \exp(-t/\tau)) \quad (17)$$

6. En déduire un ordre de grandeur de la distance de chute nécessaire pour atteindre cette vitesse limite.

Réponse

Le temps du régime transitoire (temps qu'il faut pour que la vitesse limite soit atteinte) est de l'ordre de grandeur de τ . Pendant ce temps, la bille va à une vitesse inférieure à v_{lim} . Ainsi une ordre de grandeur (surestimé) de cette distance nécessaire à atteindre la vitesse limite est

$$\delta = v_{\text{lim}}\tau = \frac{4R^4\rho_a(\rho_a - \rho_h)g^2}{81\eta^2} \quad (18)$$

7. On place deux repères distants de $L = 15\text{ cm}$ dans l'éprouvette, le premier étant situé 5 cm sous la surface. La bille met $\Delta t = 10,7\text{ s}$ pour chuter entre les deux repères. En déduire une estimation de la viscosité η de l'huile.

Réponse

On suppose qu'entre ces deux repères la bille avance à la vitesse constante v_{lim} . Ainsi

$$v_{\text{lim}} = \frac{L}{\Delta t} \implies \frac{2R^2(\rho_a - \rho_h)g}{9\eta} = \frac{L}{\Delta t} \quad (19)$$

Et ainsi

$$\eta = \frac{2R^2(\rho_a - \rho_h)g\Delta t}{9L} \quad (20)$$

L'application numérique donne

$$\eta = 1,1\text{ kg m}^{-1}\text{ s}^{-1} \quad (21)$$

2 Statique - III

1. Un glaçon de masse m est posé sur un plan incliné, sur lequel il serait susceptible de glisser sans frottement ... s'il n'était retenu par un fil tendu (figure 2).

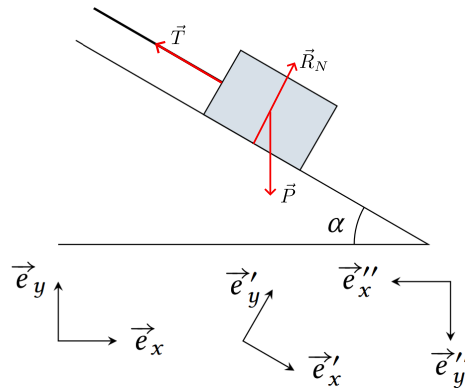


FIGURE 2 – Glaçon

- (a) Représenter les forces subies par le glaçon.

Réponse

Voir figure 2.

- (b) Les projeter dans les trois bases représentées.

Réponse

Dans la base 1

$$\vec{P} = -P\vec{e}_y \quad ; \quad \vec{R}_N = R_N(\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y) \quad ; \quad \vec{T} = T(-\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) \quad (22)$$

Dans la seconde base

$$\vec{P} = P(\sin \alpha \vec{e}_{x'} - \cos \alpha \vec{e}_{y'}) \quad ; \quad \vec{R}_N = R_N \vec{e}_{y'} \quad ; \quad \vec{T} = -T \vec{e}_{x'} \quad (23)$$

Dans la base 3 (opposée à la base 1)

$$\vec{P} = P \vec{e}_{y''} \quad ; \quad \vec{R}_N = -R_N(\sin \alpha \vec{e}_{x''} + \cos \alpha \vec{e}_{y''}) \quad ; \quad \vec{T} = T(\cos \alpha \vec{e}_{x''} - \sin \alpha \vec{e}_{y''}) \quad (24)$$

- (c) Utiliser la base la mieux adaptée au calcul afin de déterminer la norme de la tension du fil et de la réaction du support.

Réponse

On utilise la base 2 car c'est celle où 2 des 3 forces présentes s'expriment simplement. On étudie le glaçon dans le référentiel terrestre galiléen. Le système étant à l'équilibre, d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au glaçon, toutes les forces se compensent

$$\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T} = \vec{0} \quad (25)$$

Sur l'axe x' cela donne

$$P \sin \alpha - T = 0 \implies T = P \sin \alpha = mg \sin \alpha \quad (26)$$

et sur l'axe y'

$$-P \cos \alpha + R_N = 0 \implies R_N = P \cos \alpha \quad (27)$$

2. Deux boules de polystyrène de masse $m = 1$ g sont suspendues par des fils de longueur $l = 20$ cm attachés au même point. Chaque boule porte une charge électrique q . À l'équilibre les fils font un angle $2\theta = 20^\circ$ (figure 3). Déterminer q .

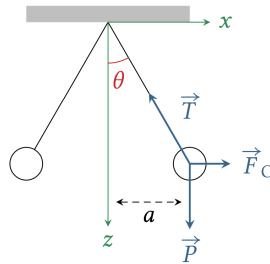


FIGURE 3 – Pendule électrostatique

Réponse

On étudie la balle de droite de la figure 3. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On utilise un repère cartésien Oxz défini sur la figure 3. La balle est soumise à trois forces : son poids

$$\vec{P} = mg\vec{u}_z \quad (28)$$

la force de Coulomb

$$\vec{F}_C = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l \sin \theta)^2} \vec{u}_x = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \theta} \vec{u}_x \quad (29)$$

la tension du fil

$$\vec{T} = T(-\cos \theta \vec{u}_z - \sin \theta \vec{u}_x) \quad (30)$$

Le système est à l'équilibre. On applique le principe fondamental de la dynamique à notre système dans le référentiel terrestre

$$\vec{P} + \vec{F}_C + \vec{T} = \vec{0} \quad (31)$$

Et on projette sur les deux axes

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \theta} - T \sin \theta = 0 \quad ; \quad mg - T \cos \theta = 0 \quad (32)$$

La deuxième équation nous permet de connaître T

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (33)$$

Et on peut ainsi en déduire q

$$q^2 = T \sin \theta \times 16\pi\epsilon_0 l^2 \sin^2 \theta \implies q = \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 l^2 mg \sin^3 \theta}{\cos \theta}} \quad (34)$$

L'application numérique donne

$$q = 3 \times 10^{-8} \text{ C} \quad (35)$$