

MP Sujet 1

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 6 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définir l'ordre d'un élément dans un groupe et donne la caractérisation de l'ordre d'un élément d'ordre fini.

Exercice 1

QUESTIONS INDÉPENDANTES Soit un groupe $(G, \cdot)$.

1. Soit $f : \begin{cases} G & \longrightarrow G \\ x & \mapsto x^{-1} \end{cases}$ Montrer que f est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe G est commutatif.
2. Soient deux sous-groupes H et K du groupe G . On note :

$$HK = \{h \cdot k, h \in H, k \in K\} \text{ et } KH = \{k \cdot h, h \in H, k \in K\}$$

- (a) Soit $x \in G$. Montrer que :

$$x \in HK \iff x^{-1} \in KH.$$

- (b) Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si KH est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 2

QUESTIONS INDÉPENDANTES

1. Donner l'ensemble G des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $(G, \times)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
3. Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $p \in \mathbb{N}$, et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^p = 0_n$.
 - (a) Montrer que $I_n + A^{-1}BA$ est inversible et exprimer son inverse.
 - (b) On pose : $H = \{I_n + P(B), P \in \mathbb{C}[X], P(0) = 0\}$. Montrer que H est un sous-groupe commutatif de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

MP Sujet 2

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 6 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Définir la fonction indicatrice d'Euler et donner deux interprétations algébriques de ce nombre.

Exercice 1

Soit un anneau $(A, +, \times)$ et deux éléments a, b de A .

1. Soit $a \in A$. Rappeler la définition de a est nilpotent
2. Soit $(q, n) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$, expliciter $\sum_{k=0}^n q^k$.
3. Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1 - ab$ est inversible et déterminer $(1 - ab)^{-1}$.
4. Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1 - ba)^{-1}$ en fonction de $(1 - ab)^{-1}$.
5. On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est également inversible.

Exercice 2

Soient $A(1, 0)$ et $B(0, 1)$. Les points $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont donnés. On construit le point P_0 par les conditions :

- les droites (P_0M_0) et l'axe des abscisses sont parallèles ;
- $P_0 \in (AB)$.

On construit le point Q_0 par les conditions :

- les droites (P_0Q_0) et (M_1B) sont parallèles ;
- $Q_0 \in (AM_1)$.

Soit le point $M_2(x_2, y_2)$ tel que le quadrilatère $(M_0P_0Q_0M_2)$ soit un parallélogramme.

On pose : $M_2 = M_0 \star M_1$.

1. Démontrer : $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1y_0 \\ y_0y_1 \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que la loi $\star$ est associative, admet un élément neutre et que, si $y_0 \neq 0$, le point M_0 admet un inverse.
3. On définit une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de M_0 , de M_1 et de la relation de récurrence valable pour tout entier $n \geq 2$: $M_n = M_{n-1} \star M_{n-2}$. Déterminer y_n en fonction de y_0 et de y_1 .

MP Sujet 3

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 6 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Citer le petit théorème de Fermat et le théorème chinois.

Exercice 1

QUESTIONS INDÉPENDANTES

1. Montrer que $\{2^n 3^m, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni de la multiplication est un groupe.
2. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe avec E un ensemble non-vidé muni d'une loi de composition interne $\star$ associative telle que :

$$\forall (a, b) \in E^2, \quad \exists (x, y) \in E^2, \quad b = a \star x = y \star a.$$

Exercice 2

Soit H une partie non vide et finie de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication. On pose : $q = |H|$ et $P = \frac{1}{q} \sum_{M \in H} M$.

1. Soit $M \in H$. Soit f définie sur $\mathbb{N}^*$ par $f : k \mapsto M^k$. Montrer que f n'est pas injective. En déduire que H est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer, si $M \in H$, que $MP = PM = P$. En déduire que : $P^2 = P$.
3. Trouver un supplémentaire, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, stable par tous les éléments de H , de $\bigcap_{M \in H} \ker(M - I_n)$.
4. Montrer que : $\sum_{M \in H} \text{tr } M \in q\mathbb{N}$. Que dire si cette somme est nulle ?