

Définition et QC

Définition/ Explication: Tracer de arctan et expliciter arctan'

Démonstration: Formule du pion et du triangle de Pascal.

Exercice 1

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
2. En déduire comment résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{3}.$$

3. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. En déduire comment résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(2x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(2x) = 2.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$, $R_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right)$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et $S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \dots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \dots + 2 \times n) + \dots + ((n-1) \times n)$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.
2. En déduire U_n .
3. Expliciter R_n .

4. Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right)$.

5. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

Définition et QC

Définition/ Explication: Expliciter les sommes d'Euler et les sommes géométriques
Démonstration: Sommes géométriques et factorisation de $a^n - b^n$.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.
2. Rappeler la formule du triangle de Pascal. En déduire $(a+b)^k$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

Exercice 2

1. Trouver le signe de la fonction f suivante définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

2. En déduire les variations de la fonction g suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^{2x}).$$

Définition et QC

Définition/ Explication: Donner la formule du pion et celle du triangle de Pascal
Démonstration: Formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Montrer que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que : $\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\arccos(1-x^2) = 2 \arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

1. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$8(\cos(\theta))^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

4. Conclure!

Définition et QC

Définition/ Explication : Expliciter $\arcsin'$, $\arccos'$ et $\arctan'$

Démonstration : Formule du pion et du triangle de Pascal.

Exercice 1

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\cos(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.
2. En déduire comment résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in [-\pi, \pi]$:

$$\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{3}.$$

3. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. En déduire comment résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos(2x) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin(2x) = 2.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $U_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$, $R_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \right)$, $\sigma_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et $S_n = (1 \times 2 + 1 \times 3 + \dots + 1 \times n) + (2 \times 3 + \dots + 2 \times n) + \dots + ((n-1) \times n)$.

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$.
2. En déduire U_n .
3. Expliciter R_n .

4. Montrer que : $2S_n + \sigma_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ij \right)$.

5. En déduire que :

$$S_n = \frac{n(n+1)(3n^2 - n - 2)}{24}.$$

Définition et QC

Définition/ Explication : Définition et tracé de ch et sh

Démonstration : Sommes géométriques et factorisation de $a^n - b^n$.

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.
2. Rappeler la formule du triangle de Pascal. En déduire $(a+b)^k$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $k \in \llbracket 2, 6 \rrbracket$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} \right)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$.

Exercice 2

1. Trouver le signe de la fonction f suivante définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f : t \mapsto \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t).$$

2. En déduire les variations de la fonction g suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto e^{-x} \ln(1 + e^{2x}).$$

Définition et QC

Définition/ Explication : Donner les propriétés classiques de exp
Démonstration : Formule du binôme de Newton.

Exercice 1

Montrer que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire que : $\forall x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $\arccos(1-x^2) = 2 \arctan(x) \iff x \in \{0, 1\}$.

Exercice 2

On veut résoudre l'équation (E) suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$8x^3 = 6x + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

1. Expliciter $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation suivante d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$8(\cos(\theta))^3 = 6\cos(\theta) + \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

4. Conclure!