

EXERCICE 8 analyse

Énoncé exercice 8

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Corrigé exercice 8

1. (a) $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$, donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De même $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geq 0$, donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = 0$.

On en déduit que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Donc elles convergent et ce vers une même limite.

Comme $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ recouvrent l'ensemble des termes de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers cette limite.

Ce qui signifie que la série $\sum (-1)^k u_k$ converge.

(b) Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq u_{n+1}$.

2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = (-1)^n u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = +\infty$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement.

Si $x \geq 0$, alors $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

Donc d'après 1.(a), $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Remarque : pour $x > 0$, on a aussi convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$.

En effet, pour tout réel $x > 0$, $n^2 |f_n(x)| = ne^{-nx} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|f_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(b) Comme $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, on peut poser $\forall x \in [0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Alors, comme, $\forall x \in [0, +\infty[, (u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$, on en déduit, d'après 1.(b), que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}.$$

Et donc $\forall x \in [0, +\infty[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)

$$\text{Donc } \|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}.$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, alors (R_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

C'est-à-dire $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

EXERCICE 14 analyse

Énoncé exercice 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Corrigé exercice 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a, b]$.

On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$.

On a :

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx.$$

Or, $\forall x \in [a, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$.

$$\text{Donc } \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b - a) \|f_n - f\|_\infty. \quad (*)$$

Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

$$\text{Donc d'après } (*), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

$$\text{On pose } S_n = \sum_{k=0}^n f_k.$$

$\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, donc converge simplement sur $[a, b]$.

$$\text{On pose alors, également, } \forall x \in [a, b], S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

$\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers S .

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a, b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.

On en déduit que S est continue sur $[a, b]$.

$$\text{Et d'après 1., } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

$$\text{Or } \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx \text{ car il s'agit d'une somme finie.}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

$$\text{Ou encore } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx.$$

$$\text{Ce qui signifie que } \sum \int_a^b f_k(x) dx \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx.$$

Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur $[a, b]$ permet d'intégrer terme à terme, c'est-à-dire : $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx$.

3. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R = 1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset]-1, 1[$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit alors, en utilisant 2., que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$.

EXERCICE 16 analyse

Énoncé exercice 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

- Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.
- On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Corrigé exercice 16

- Soit $x \in [0, 1]$.
Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$.
Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0, 1]$.
La fonction S est donc définie sur $[0, 1]$.
- On a $S(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right)$.
Or $\sum_{k=1}^n \left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\ln(k+1) - \ln(k) \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers $S(1)$.
Donc la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.
Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1)$.
On a donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n+1) - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n+1) + \mathcal{O}(1)$ et donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n+1)$.
En remarquant que $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ on voit que $\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
On en déduit que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- On a déjà vu que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0, 1]$.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1]$, $u'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. (majoration indépendante de x).
On en déduit que $\|u'_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Donc $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ Et on a : $\forall x \in [0; 1], S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$.

En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)$.

Or $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -1$.

Donc $S'(1) = -1$.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq 1/n^2$$

Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \rightarrow 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

a) Pour $x \in]0, 1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.

b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x \right| \leq x^{2(n+2)} |\ln x|$$

L'étude de $\varphi : x \mapsto x^{2(n+2)} |\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0, 1], x^{2(n+2)} |\ln x| \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)} \rightarrow 0$$

c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \ln x dx - \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2} dx$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0, 1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.