

MPI Sujet 1

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 3 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{x}{x^2 + n^2} \end{cases}$ converge simplement, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$ mais converge normalement sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
 - (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente. **Indication** : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.
 - (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ puis sa convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2

On définit $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $]0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) \text{ et } u_n(0) = 0.$$

1. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0, 1]$.
3. En déduire l'égalité : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

MPI Sujet 2

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 3 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 1

Banque CCINP :

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la

suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice 2

QUESTIONS INDÉPENDANTES

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$$

2. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kx}}{k^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

MPI Sujet 3

Corrigé dès vendredi sur:

Semaine de colle: 3 <https://cahier-de-prepa.fr/mp2i-dalzon/docs?kback>

COLLES DE MATHÉMATIQUES DE M BACQUELIN

Question de cours

Démontrer que la convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Exercice 1

Banque CCINP : On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est définie sur $[0, 1]$.

2. On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

En utilisant $S(1)$ démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

En déduire un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3. Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Exercice 2

QUESTIONS INDÉPENDANTES

1. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions $\sum f_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}.$$

2. Étude de la convergence simple, normale et uniforme de $\sum f_n$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(-1)^n}{x+n} \end{cases}.$$