

TD 6 - Correction

1 Expressions de la force de rappel - II

Exprimer vectoriellement la force de rappel des différents ressorts dans les cas suivants (figure 1), où l'objet M quasi ponctuel est repéré par son abscisse $x = \overrightarrow{OM}$ sur l'axe (Ox) .

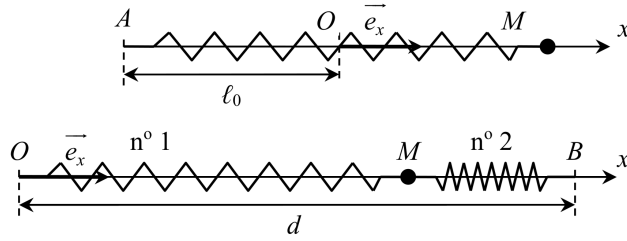


FIGURE 1 – Situations étudiées

1. M est lié à un point fixe A , tel que $\overrightarrow{AO} = l_0 \vec{e}_x$ par un ressort idéal de raideur k de longueur à vide l_0 .

Réponse

La force de rappel du ressort est

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\text{ext}} \quad (1)$$

Ici $l = l_0 + x$ et $\vec{u}_{\text{ext}} = \vec{u}_x$, ainsi

$$\vec{F} = -kx\vec{u}_x \quad (2)$$

2. M se déplace entre l'origine O et le point B fixe tel que $\overrightarrow{OB} = d\vec{e}_x$. M est lié à l'origine par un ressort de raideur k de longueur à vide l_0 et au point B par un ressort identique au précédent.

Réponse

On fait de même, en appelant $\vec{F}_1$ la force du ressort 1 et $\vec{F}_2$ celle du ressort 2.

$$\vec{F}_1 = -k(x - l_0)\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{F}_2 = k(d - x - l_0)\vec{u}_x \quad (3)$$

2 Oscillations avec deux ressorts -III

Considérons un point matériel M de masse m glissant horizontalement et sans frottement, repéré par son abscisse x telle que $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$. Ce solide est relié à deux ressorts placés sur un même axe, eux-mêmes fixés en O et O' . Le solide étudié se trouve entre O et O' . La longueur OO' est notée L . Les ressorts ont même longueur à vide l_0 , mais celui fixé en O' a une raideur k' double par rapport à celui fixé en O , $k' = 2k$.

1. Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de la masse.

Réponse

On étudie le mouvement du point M seulement sur l'axe x . On se place dans le référentiel terrestre galiléen. Le point M est à l'équilibre si la résultante des forces qu'il subit est nulle, ainsi

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (4)$$

Le point M subit une force $\vec{F}$ de la part du premier ressort et une force $\vec{F}'$ de la part du second. On a ainsi

$$\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0} \quad (5)$$

$$-k(x_{\text{éq}} - l_0) + 2k(L - x_{\text{éq}} - l_0) = 0 \implies 3kx_{\text{éq}} = 2kL - kl_0 \quad (6)$$

et ainsi

$$x_{\text{éq}} = \frac{2L - l_0}{3} \quad (7)$$

2. Établir l'équation du mouvement.

Réponse

On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse m dans R galiléen et on le projette sur l'axe $\vec{u}_x$

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) + 2k(L - x - l_0) \implies m\ddot{x} + 3kx = 2kL - kl_0 \quad (8)$$

On pose $\omega_0^2 = 3k/m$ et ainsi

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{éq}} \quad (9)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 .

3. Supposons qu'à l'instant $t = 0$, M est placé en $x = x_0 > x_{\text{éq}}$ et lancé avec une vitesse initiale $\dot{x} = -v_0 < 0$. Établir la loi horaire $x(t)$ et représenter son allure.

Réponse

Une solution particulière est $x = x_{\text{éq}}$. La solution générale est ainsi

$$x(t) = x_{\text{éq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (10)$$

Pour trouver A et B on utilise les conditions initiales

$$x(t = 0) = x_0 = x_{\text{éq}} + A \implies A = x_0 - x_{\text{éq}} \quad (11)$$

$$\dot{x}(t = 0) = -v_0 = \omega_0 B \implies B = -v_0/\omega_0 \quad (12)$$

Et finalement, l'équation horaire est

$$x(t) = x_{\text{éq}} + (x_0 - x_{\text{éq}}) \cos(\omega_0 t) - \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (13)$$

3 Oscillations d'un système masse ressort à la verticale - III

Une masse m est suspendue verticalement (vers le bas) à un ressort de raideur k de longueur à vide l_0 . L'origine O est placée au niveau du point d'attache du ressort. On place l'axe (Oz) vers le bas. On note $\vec{g} = g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1. Déterminer $z_{\text{éq}}$ la longueur du ressort lorsqu'il est à l'équilibre.

Réponse

On étudie la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On se place dans le repère cartésien, l'origine étant au point d'attache du ressort et l'axe z vers le bas. La point matériel subit son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_z$ et la force de rappel du ressort

$$\vec{F} = -k(z - l_0)\vec{u}_z \quad (14)$$

D'après le principe fondamental de la dynamique, le point est à l'équilibre lorsque la résultante des forces qu'il subit est nulle, ainsi

$$\vec{F} + \vec{P} = \vec{0} \implies -k(z_{\text{eq}} - l_0) + mg = 0 \implies z_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k} \quad (15)$$

Cette expression est logique : $z_{\text{eq}} > l_0$ pour que le poids égale la force de rappel. Pour $k \rightarrow +\infty$ (ressort infiniment raide) on retrouve $z_{\text{eq}} = l_0$.

2. On note $\delta = z - z_{\text{eq}}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par δ . On suppose qu'initialement le ressort est sans vitesse et tel que $\delta(t=0) = \delta_0$. Donner $\delta(t)$.

Réponse

On commence par chercher l'équation différentielle sur z puis on en déduira celle sur δ , en utilisant notamment le fait que $z = \delta + z_{\text{eq}}$ et $\ddot{z} = \ddot{\delta}$. On applique le PFD à la masse m dans le référentiel terrestre galiléen

$$m\ddot{z} = mg - k(z - l_0) \implies m\ddot{\delta} = mg - k(\delta + z_{\text{eq}} - l_0) \quad (16)$$

Ainsi

$$m\ddot{\delta} + k\delta = mg - k(l_0 + \frac{mg}{k} - l_0) = 0 \quad (17)$$

Finalement, en posant $\omega_0^2 = k/m$, on trouve

$$\ddot{\delta} + \omega_0^2\delta = 0 \quad (18)$$

équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 , sans second membre. La solution est donc la solution de l'équation homogène

$$\delta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (19)$$

Or initialement $\delta(0) = \delta_0$ et $\dot{z}(t=0) = \dot{\delta}(t=0) = 0$ ainsi

$$A = \delta_0 \quad \text{et} \quad B = 0 \quad (20)$$

Ainsi

$$\delta(t) = \delta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (21)$$

4 Deux masses, deux ressorts, à la verticale - IV

On considère le système représenté sur la figure 2. Une masse m_1 est suspendue verticalement au bout d'un premier ressort de raideur k_1 et de longueur à vide $l_{0,1}$. L'origine O est placée au point d'attache de ce ressort. Un second ressort ($k_2, l_{0,2}$) est accroché en dessous de cette masse m_1 et une masse m_2 est suspendue au bout du second ressort.

1. Déterminer les allongements $\Delta l_1 = l_1 - l_{0,1}$ et $\Delta l_2 = l_2 - l_{0,2}$ à l'équilibre. On les notera $\Delta l_{1,\text{eq}}$ et $\Delta l_{2,\text{eq}}$.

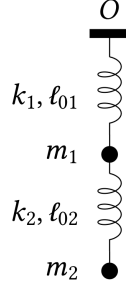


FIGURE 2 – Situation étudiée

Réponse

Afin de trouver les allongements à l'équilibre, on va devoir donner la condition d'équilibre des forces pour chacune des masses m . On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen, dans un repère cartésien avec l'axe z dirigé vers le bas. La masse m_1 subit comme forces

- Son poids $\vec{P} = m_1 g \vec{u}_z$
- La force de rappel du premier ressort $\vec{F}_1 = -k_1(l_1 - l_{0,1})\vec{u}_z = -k_1 \Delta l_1 \vec{u}_z$
- La force de rappel du second ressort $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = k_1(l_2 - l_{0,2})\vec{u}_z = k_2 \Delta l_2 \vec{u}_z$

À l'équilibre, on a donc

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0} \quad (22)$$

et ainsi

$$m_1 g - k_1 \Delta l_{1,\text{éq}} + k_2 \Delta l_{2,\text{éq}} = 0 \quad (23)$$

Il nous faut une autre équation, qui est la condition d'équilibre de la seconde masse, qui subit comme force

- Son poids $\vec{P} = m_2 g \vec{u}_z$
- La force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{2 \rightarrow 2} = -k_2 \Delta l_2 \vec{u}_z$

À l'équilibre on a donc

$$m_2 g - k_2 \Delta l_{2,\text{éq}} = 0 \implies \Delta l_{2,\text{éq}} = \frac{m_2 g}{k_2} \quad (24)$$

On injecte cette expression dans la première

$$k_1 \Delta l_{1,\text{éq}} = m_1 g + k_2 \Delta l_{2,\text{éq}} = (m_1 + m_2)g \implies \Delta l_{1,\text{éq}} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} \quad (25)$$

Le premier ressort "supporte" les deux masses tandis que le second ne "supporte" que la deuxième.

2. Établir les équations différentielles vérifiées par z_1 et z_2 qui sont les écarts des masses 1 et 2 aux positions d'équilibres trouvées précédemment.

Réponse

On exprime Δl_1 et Δl_2 en fonction de leurs valeurs à l'équilibre et de z_1 et z_2

$$\Delta l_1 = \Delta l_{1,\text{éq}} + z_1 \quad (26)$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{2,\text{éq}} + z_2 - z_1 \quad (27)$$

on trouve ces expressions en raisonnant sur le schéma : augmenter la longueur du ressort 2 ne change pas la position du ressort 1, alors qu'augmenter la longueur du 1 affecte bien celle du 2. Les accélérations des masses m_1 et m_2 sont $\ddot{z}_1$ et $\ddot{z}_2$. Ainsi, appliquer le PFD aux deux masses nous donne les deux équations différentielles suivantes

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 \quad (28)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - k_2 \Delta l_2 \quad (29)$$

On remplace Δl_1 et Δl_2 par les expressions données précédemment

$$m_1 \ddot{z}_1 = m_1 g - k_1 \left(\frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} + z_1 \right) + k_2 \left(\frac{m_2 g}{k_2} + z_2 - z_1 \right) \quad (30)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - k_2 \left(\frac{m_2 g}{k_2} + z_2 - z_1 \right) \quad (31)$$

On simplifie les expressions

$$m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2 z_1 = k_2 z_2 \implies \ddot{z}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} z_1 = \frac{k_2}{m_1} z_2 \quad (32)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k_2 z_2 = k_2 z_1 \implies \ddot{z}_2 + \frac{k_2}{m_2} z_2 = \frac{k_2}{m_2} z_1 \quad (33)$$

Ce sont des équations différentielles du second ordre couplées : la dérivée de z_1 dépend de z_2 et inversement. À priori, on ne sait pas résoudre de telles équations. On va donc faire des hypothèses dans la question suivante.

3. La masse m_2 est maintenant supposée maintenue dans sa position d'équilibre. La masse m_1 est alors déplacée de z_0 de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale. Trouver l'équation $z_1(t)$ régissant le mouvement de m_1 .

Réponse

On maintient la masse 2 dans sa position d'équilibre don $z_2 = 0$ ce qui simplifie grandement le problème. L'équation sur z_1 est alors

$$\ddot{z}_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_1} z_1 = 0 \quad (34)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation caractéristique ω_0 définie par

$$\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \quad (35)$$

Les solutions de cette équations sont

$$z_1(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (36)$$

En appliquant les conditions initiales

$$A = z_0 \quad \text{et} \quad B = 0 \quad (37)$$

d'où

$$z_1(t) = z_0 \cos(\omega_0 t) \quad (38)$$