

DS 1 - Optique géométrique, mécanique du point

Durée 3 heures - Calculatrices autorisées (mode examen)
Ce problème est composé de 2 parties indépendantes, elles mêmes
composées de sous-parties souvent indépendantes.

Concentre toi en priorité sur les question 2 à 9 et 21 à 30.

1 Orbite et observation de la planète Mars

Données :

Planète	Rayon (km)	Rayon de l'orbite (km)	Période de l'orbite
Terre	$6,3 \times 10^3$	$1,5 \times 10^6$	$T_T = 365$ jours
Mars	$3,4 \times 10^3$	$2,3 \times 10^6$	$T_M = 687$ jours

TABLE 1 – Caractéristiques de la Terre, Mars et de leurs orbites autour du soleil.

1.1 Orbites de la Terre et de Mars

On considère que la Terre et Mars ont toutes deux une orbite circulaire autour du soleil, et qu'elles ont ainsi toutes les deux un mouvement circulaire uniforme autour de ce dernier.

Q 1. Faire un schéma représentant les orbites de la Terre et de Mars autour du soleil. Y représenter les coordonnées polaires (r, θ) ainsi que les vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On notera $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire.

Q 2. Donner l'expression générale du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires.

Q 3. Donner l'expression simplifiée de $\vec{v}$ pour un mouvement circulaire. Quelle est la conséquence sur ω du caractère uniforme du mouvement ?

Q 4. À l'aide des données du tableau 1, calculer les vitesses angulaires de la Terre et de Mars $\omega_T = \dot{\theta}_T$ et $\omega_M = \dot{\theta}_M$.

Q 5. Déterminer la distance minimale $d_{\min}$ entre la Terre et Mars. Lorsque la Terre et Mars sont dans cette configuration, on dit qu'elles sont en conjonction.

On cherche à déterminer la *période synodique* S du couple Terre-Mars c'est à dire le temps séparant deux conjonctions. On suppose qu'à $t = 0$ les deux planètes sont en conjonction.

Q 6. Justifier alors que $\theta_T(t = 0) = \theta_M(t = 0)$. On prendra ici l'origine des angles et ainsi pour la suite $\theta_T(t = 0) = \theta_M(t = 0) = 0$.

Q 7. Donner les expressions de $\theta_T(t)$ et $\theta_M(t)$.

Q 8. La conjonction suivante se fait lorsque les deux planètes ont à nouveau le même angle θ , à 2π près car une planète aura fait un tour de plus que l'autre. Justifier qui entre la Terre et Mars aura fait un tour de plus.

Q 9. En déduire que

$$S = \frac{1}{\frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M}} \quad (1)$$

Faire l'application numérique.

1.2 Observation de Mars à l'aide d'une lunette astronomique

On considère une lunette astronomique, comportant un objectif constitué d'une lentille mince convergente de centre O_1 et de focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1} > 0$ et un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de centre O_2 et de focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2} > 0$. Ces deux lentilles ont même axe. On souhaite observer la planète Mars à travers la lunette, en formant un système afocal, c'est à dire faisant l'image à l'infini d'un objet à l'infini.

Q 10. On considère tout d'abord une lentille simple convergente, de focale f' , de centre optique O . Elle fait l'image $A'B'$ d'un objet réel AB , placé avant son foyer objet F . Faire un schéma et le tracé des rayons lumineux correspondant à cette situation.

Q 11. Rappeler la définition du grandissement γ . À l'aide du tracé fait à la question précédente, démontrer la relation de grandissement reliant γ , $\overline{OA'}$ et $\overline{OA}$.

Q 12. La lunette étant afocale, exprimer la distance entre les lentilles $\overline{O_1O_2}$ en fonction de f'_1 et f'_2 .

Q 13. Faire un schéma et tracer au moins deux rayons lumineux, en prenant $f'_1 = 5f'_2$. Représenter l'image intermédiaire notée $A'B'$.

On note α' le diamètre angulaire de la planète vue à travers la lunette (c'est-à-dire l'angle entre les rayons extrêmes de l'image) et α le diamètre angulaire de la planète vue à l'œil nu.

Q 14. En considérant que Mars est à la distance $d_{\min}$ (définie à la question 5) de la Terre, et en utilisant les données du tableau 1 calculer α .

Q 15. L'image finale de Mars à travers la lunette est-elle droite ou renversée ?

Q 16. Déterminer l'expression du grossissement G de la lunette défini comme

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (2)$$

Donner sa valeur numérique.

On veut augmenter le grossissement et redresser l'image. Pour cela, on intercale entre l'objectif et l'oculaire une lentille mince convergente L_3 de centre O_3 et de focale $f'_3 = \overline{O_3F'_3} > 0$, qu'on place de telle sorte que l'image finale à travers l'ensemble soit à l'infini.

A étant l'objet à l'infini, on note schématiquement

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A' \xrightarrow{L_3} A'' \xrightarrow{L_2} A'''_\infty \quad (3)$$

Q 17. L'objet A_∞ et l'image A'''_∞ étant effectivement à l'infini, déterminer où sont les images intermédiaires A' et A'' par rapport aux foyers des lentilles 1 et 2.

Q 18. Faire un schéma de la situation et tracer au moins deux rayons lumineux. On notera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$ la deuxième.

Q 19. On appelle γ_3 le grandissement de la lentille L_3 . Exprimer $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de γ_3 et f'_3 .
On pourra s'aider de la relation de grandissement établie à la question 11.

Q 20. Déterminer le nouveau grossissement G' de l'ensemble en fonction de G et γ_3 .

2 Pluie et arc-en-ciel (d'après CCINP MPI 2023)

2.1 Chute d'une goutte de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau sphérique de diamètre D , de masse volumique $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$. L'étude se fait dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe Oz est vertical **descendant**, l'accélération de la pesanteur est donc $\vec{g} = g\vec{u}_z$ avec $g \simeq 10 \text{ m/s}^2$. On suppose que cette goutte tombe depuis une hauteur $h = 2,0 \text{ km}$ sans vitesse initiale. L'origine O est prise à la position initiale de la goutte.

Q 21. Définir "référentiel galiléen".

Q 22. Exprimer le volume V de la goutte d'eau puis sa masse m , en fonction de D et ρ .

Q 23. On néglige dans un premier temps les frottements de l'air sur la goutte. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à cette dernière afin de déterminer l'équation horaire $z(t)$.

Q 24. Déterminer le temps de chute t_c de la goutte ainsi que sa vitesse v_c lorsqu'elle touche le sol.

On considère maintenant que la goutte de pluie subit une force de frottement $\vec{F}_f$ lors de sa chute, dont l'expression est

$$\vec{F}_f = -Kv^2\vec{u}_z \quad (4)$$

où K est une constante.

Q 25. Déterminer l'unité de K .

Q 26. On admet qu'en présence de frottements, la vitesse de la goutte ne peut pas dépasser une certaine vitesse, appelée vitesse limite et notée v_{lim} . On cherche à déterminer l'expression de v_{lim} , tout d'abord par analyse dimensionnelle. On suppose que cette vitesse peut dépendre de K , m et g et ainsi que

$$v_{\text{lim}} = K^\alpha m^\beta g^\gamma \quad (5)$$

Déterminer α , β et γ et en déduire l'expression de v_{lim} . Commenter l'expression obtenue.

Q 27. Montrer qu'on retrouve la même expression en supposant que lorsqu'elle tombe à la vitesse v_{lim} , la goutte est à l'équilibre des forces (résultante des forces nulle).

Q 28. Pour une goutte de diamètre $D = 5 \text{ mm}$, on a $K = 6,1 \times 10^{-6} \text{ SI}$. Calculer v_{lim} , commenter le résultat et l'importance de prendre en compte les frottements, en regard à votre réponse à la question 24.

2.2 Optique géométrique de l'arc-en-ciel

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel. On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la figure 1.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i . L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 1) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

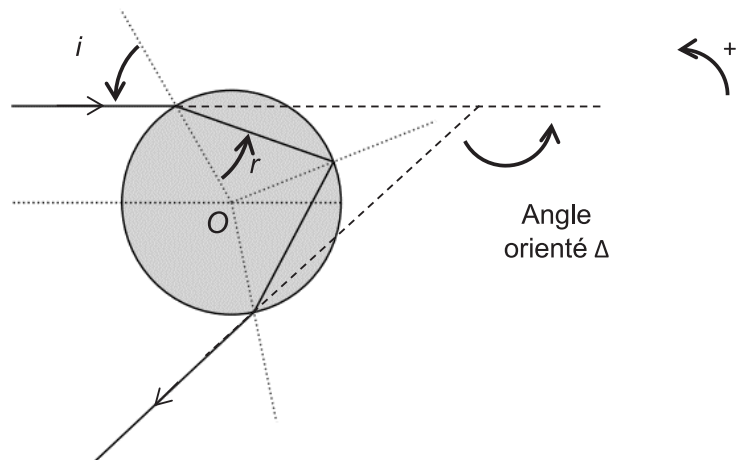


FIGURE 1 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions

Q 29. Rappeler les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .

Q 30. Le phénomène de réflexion totale (qui ne joue aucun rôle particulier dans l'exemple présenté ici) peut-il avoir lieu lors du passage air $\rightarrow$ eau ou eau $\rightarrow$ air ? Justifier votre réponse.

Q 31. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (figure 7).

Montrer que :

$$\Delta = \pi - 4r + 2i. \quad (6)$$

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin(i)$.

Q 32. Montrer que $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin(i_m) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}. \quad (7)$$

Données :

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (8)$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x/n) = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - (x/n)^2}} \quad (9)$$

Q 33. Justifier à l'aide de la figure 2 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction

$$\Delta = \Delta_m. \quad (10)$$

Q 34. Calculer x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet $\lambda = 400 \text{ nm}$, $n = 1,343$ et pour le rouge $\lambda = 700 \text{ nm}$, $n = 1,330$.

Q 35. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m .

L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

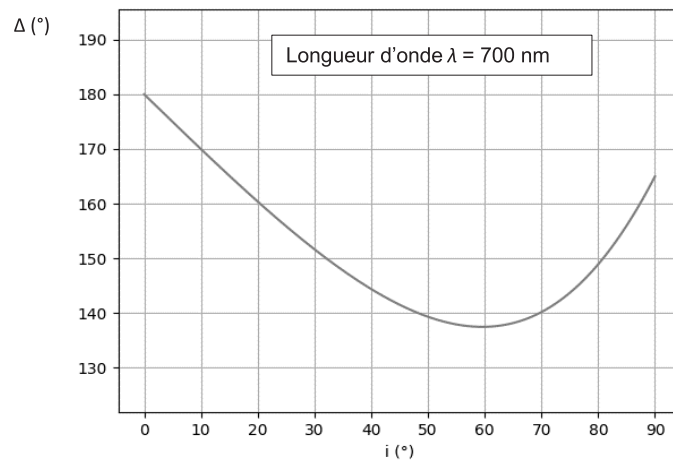


FIGURE 2 – Déviation en fonction de l'angle d'incidence

FIN DU SUJET